Cangur 2012
i altres activitats de la SCM

En aquesta publicació es presenten els enunciats, les relacions de participants més destacats i les solucions comentades de les activitats de resolució de problemes que la SCM ha convocat durant el curs 2011-2012: el concurs telemàtic previ a l'Olimpíada i la segona edició de la **Marató de problemes**, la **XLVIII Olimpíada Matemàtica** (fase catalana), els **Problemes a l'esprint** (per a Primària i Secundària) i el **Cangur 2012**.

Cangur 2012 i altres activitats de la SCM
Publicació de la Societat Catalana de Matemàtiques,
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
http://scm.iec.cat *http://www.cangur.org*

Imprès a Service Point FMI, SA
Dipòsit Legal: B-17354-2012

Índex

Cangur 2012

Marató de problemes 2012

Presentació

El llibret que teniu a les mans és el recull d'enunciats i solucions dels problemes que s'han proposat en els concursos organitzats per la Societat Catalana de Matemàtiques durant el curs 2011-2012. També reproduïm en cada cas les llistes dels premiats, en homenatge als nois i noies que han destacat en enfrontar-se a aquests problemes, reeixint en un repte que els ha posat davant de proves que no són pas fàcils de superar.

Aquest llibret té el títol de **Cangur 2012**, perquè la prova Cangur és potser l'activitat més coneguda i popular entre les que organitza la SCM, i també la que dóna lloc a una llista més extensa d'enunciats de problemes. Aquests problemes tenen el seu origen en reculls d'enunciats que cada any preparen els representants de més de quaranta països que formen part de l'organització internacional *Le Kangourou sans Frontières*. La SCM forma part d'aquesta organització, i com a tal també contribueix a la confecció d'aquests reculls, i és l'encarregada de la seva selecció, traducció i adaptació al català, tasca que duu a terme a través d'una comissió, en la qual participen representants dels organitzadors de les proves a les Illes Balears i la Comunitat Valenciana.

L'organització de les proves, que mobilitzen gairebé 28.000 nois i noies de les terres de parla catalana, seria impossible sense el compromís i la col·laboració de moltes institucions. A Catalunya, de les universitats de Barcelona, Autònoma de Barcelona, Politècnica de Catalunya, Pompeu Fabra, de Vic, de Lleida, de Girona, Rovira i Virgili, Ramon Llull, Internacional de Catalunya, així com el suport del Departament d'Ensenyament i de l'Obra Social de Catalunya-Caixa, que subvenciona totes les activitats que s'esmenten en aquest llibret. A Balears, de la Societat Balear de Matemàtiques-XEIX i de la universitat de les Illes Balears i a la Comunitat Valenciana, de les universitats Jaume I, de València, Politècnica de València, d'Alacant i de la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana SEMCV Al-Khwarizmi. Que quedi escrit aquí l'agraïment de la Societat Catalana de Matemàtiques a aquestes institucions.

Les proves Cangur s'estructuren en quatre nivells, corresponents respectivament a tercer i quart d'ESO i a primer i segon de batxillerat. Degut a la interferència de la data fixada internacionalment (el tercer dijous de març) amb tradicions del País Valencià, aquest any 2012 també han hagut de fer-se allà un dia diferent del de la resta de territoris, i per tant reproduïm dos conjunts, en bona part diferents, d'enunciats i solucions per cada nivell.

L'altre concurs del qual presentem els enunciats dels problemes és el de la fase catalana de la **XLVIII Olimpíada Matemàtica**, que es completa amb un concurs telemàtic previ. L'Olimpíada és un concurs organitzat coordinadament amb la Real Sociedad Matemàtica Española, que s'ocupa de la fase espanyola del concurs i de la participació en la fase internacional. Quan pensem tant en el Cangur com en la fase Catalana de la Olimpíada Matemàtica no podem deixar de recordar amb agraïment les persones i institucions que organitzen sessions de preparació i entrenament per als alumnes que ho demanen.

També trobareu en aquest llibret la informació completa d'un altre concurs, els **Problemes a l'Esprint**. Es tracta d'una activitat telemàtica en què els participants són equips d'estudiants, i a la que per tant no es pot participar de manera individual. Una altra característica d'aquest concurs és que els guanyadors es determinen per la velocitat amb la que han resolt els problemes, a més d'haver-ho fet correctament. Aquest és l'origen del seu nom, i probablement també de l'interès i emoció amb el que cada cop més alumnes hi participen. Aquest concurs l'organitza la SCM amb la col·laboració de la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT) i el Centre de Recursos per Ensenyar i Aprendre Matemàtiques (CREAMAT).

El darrer concurs del que presentem els enunciats és la **Marató de Problemes** per a alumnes d'ESO, plantejada seguint la idea del concurs telemàtic de l'Olimpíada i que, com els Problemes a l'Esprint també es convoca conjuntament amb la FEEMCAT i el CREAMAT, però que pel demés es troba a l'altre extrem de les característiques de l'Esprint: la participació és individual i el que es valora és la permanència i regularitat durant un llarg període de temps de solució de problemes.

La vitalitat i l'èxit d'aquests concursos posa de manifest que encara que passin els anys i els hàbits socials canviïn, l'antiquíssima emoció davant de la capacitat de resoldre un problema matemàtic es manté intacta entre els joves alumnes, com ho ha estat sempre al llarg de la història. El lector d'aquest llibret està convidat a participar d'aquesta emoció resolent els problemes proposats, discutint-los amb altres persones interessades, buscant i comparant maneres diferents de resoldre'ls i participant d'aquesta manera en la gran tasca intel·lectual que la Matemàtica representa.

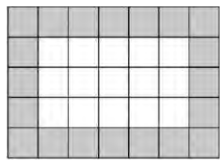
Joan de Solà-Morales Rubió
President
Societat Catalana de Matemàtiques

XLVIII Olimpíada Matemàtica

Concurs telemàtic de resolució de problemes
Octubre i novembre de 2011. Enunciats

0. (Problema de 2 punts.)
Escrivim en una fila, però no necessàriament per ordre, els nombres enters de l'1 al 2011. Calculem les mitjanes de cada dos nombres consecutius en aquesta fila i després sumem totes aquestes mitjanes. Quin és el resultat més gran que podem obtenir?

1. (Problema de 2 punts.)
Un mosaic rectangular està fet de rajoles quadrades totes iguals. Totes les rajoles són blanques, excepte les de les vores, que són grises, com l'exemple que teniu a la figura.



És possible fer un mosaic així, de manera que la quantitat necessària de rajoles grises i la de rajoles blanques per a construir-lo siguin quantitats iguals? En cas afirmatiu, haureu de donar totes les solucions del nombre necessari de rajoles blanques.

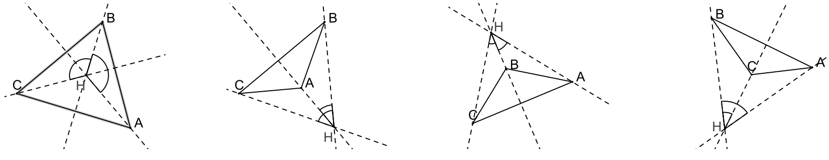
2. (Problema de 3 punts.)
Escrivim consecutivament els nombres naturals 1, 2, 3, ... sense deixar espais, és a dir

$$12345678910111213141516...$$

Quina xifra hi ha al lloc 6.000.000? I al lloc 6.002.012?

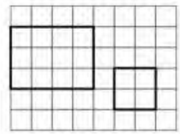
3. (Problema de 2 punts.)
Donats els angles que formen entre sí dues parelles d'altures d'un triangle, calculeu els angles del triangle.

En funció de la contrasenya, les dades que es donaven corresponien a un d'aquests esquemes:



4. (Problema de 4 punts.)

La figura mostra una quadrícula 8×6 on hi podeu veure dibuixats dos rectangles, formats per unió de quadradets de la quadrícula (i que tenen els vèrtexs en punts de la quadrícula i els costats paral·lels a les línies de la quadrícula), un dels quals és un quadrat.



Quants rectangles es poden dibuixar amb els vèrtexs en punts d'una quadrícula rectangular que té dimensions $m \times n$, amb els costats paral·lels a les línies que determinen la quadrícula? Quants d'aquests rectangles són quadrats?

---

5. (Problema de 4 punts. Es demanava explicació detallada.)

Considereu dues circumferències tangents exteriorment, de radis diferents R i r. Les tres rectes tangents comunes a ambdues circumferències delimiten un triangle. Calculeu-ne l'àrea en funció dels radis R i r.

---

6. (Problema de 4 punts.)

Calcula totes les solucions reals de l'equació

$$99x^2 - 160y^2 - 36z^2 - 36x^4 - 72xy + 48yz - 81 = 0.$$

Nota: els coeficients de l'equació estaven personalitzats en funció de la contrasenya. Se'n dóna un exemple concret.

---

7. (Problema de 3 punts.)

A partir d'un triangle isòsceles ABC, mitjançant paral·leles als costats, podem construir un rombe i un altre triangle isòsceles petit, com es pot veure a la figura. Hem mesurat l'àrea del rombe, que és de S unitats d'àrea, i la del triangle petit, que és de T unitats d'àrea. Quina és la mesura de l'àrea del triangle ABC inicial?

Nota: aquest problema es plantejava amb dades numèriques que depenien de la contrasenya.

---

8. (Problema de 3 punts.)

Quins són tots els enters positius N amb dígit inicial d (escrits en base 10), que compleixen la propietat que l'enter obtingut suprimint aquest d és $\frac{1}{a}$ del nombre original?

Nota: aquest problema es plantejava amb dades numèriques que depenien de la contrasenya.

---

9. (Problema de 7 punts. Es demanava explicació detallada.)
Del polinomi

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n)$$

sabem que els coeficients,a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n , són nombres enters i que existeixen nombres diferents, a, b, c, d, també enters, que compleixen

$$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5.$$

Demostreu que l'equació $f(x) = 8$ no té solucions enteres.

---

10. (Problema de 7 punts. Es demanava explicació detallada.)
Tenim un cercle de diàmetre AB i un punt qualsevol X del cercle, diferent de A i de B. Anomenem t_A, t_B, t_X les tangents al cercle pels punts A, B, i X, respectivament. Siguin Z el punt on es tallen les rectes AX i t_B, i Y el punt on es tallen les rectes BX i t_A. Demostreu que les rectes YZ, t_X i AB són, o bé paral·leles o bé concurrents.

XLVIII Olimpíada Matemàtica

Concurs telemàtic. Els resultats

Aquesta activitat es va desenvolupar des del dia 14 d'octubre de 2011 fins el dia 28 de novembre de 2011.

Es van inscriure 151 participants.

Les respostes rebudes van ser valorades globalment com a molt positives i cal destacar que 15 persones van enviar les solucions encertades a tots els problemes de resposta concreta (0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, i 8), que 12 van enviar raonaments correctes a tots tres problemes dels quals es demanava una explicació detallada (5, 9 i 10) i que 29 participants van superar els 21 punts de 41 possibles.

- **Primers premis**, ex-aequo amb 40,8 punts
  Gerard Orriols Giménez, 4rt ESO, Institut Thalassa, de Montgat i
  Marc Felipe i Alsina, 1r BTX, Institut Jaume Vicens Vives, de Girona
- **Segons premis**, ex-aequo amb 40,6 punts
  David Masip Bonet, 2n BTX, Institut Pons d'Icart, de Tarragona i
  Eric Milesi Vidal, 2n BTX, Col·legi Pare Manyanet, de Barcelona
- **Mencions**, alumnes que han superat els 38 punts
  Júlia Alsina Oriol, 2n BTX, Institut Jaume Callís, de Vic,
  Jordi Barceló Mercader, 2n BTX,
  Col·legi Jesús Maria-Sant Andreu, de Barcelona,
  Pol Torrent Soler, 2n BTX, Institut Jaume Vicens Vives, de Girona,
  Paula Caballero Lillo, 1r BTX,
  Institut Francesc Xavier Lluch i Rafecas de Vilanova i la Geltrú i
  Pau Surrell Rafart, 1r BTX, Institut Jaume Vicens Vives, de Girona

XLVIII Olimpíada Matemàtica

Concurs telemàtic. Solucions

0. Resposta: $\dfrac{4046129}{2}$.

Si la fila de nombres és $\{a, b, c, d, ..., x, y, z\}$ i fem totes les mitjanes de cada dos nombres consecutius, $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+d}{2}, ..., \frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}$, podem observar que hi tenim $\frac{a}{2}$, $\frac{z}{2}$ (per al primer i l'últim de la llista) i que per cadascun dels altres nombres, n, apareix dues vegades $\frac{n}{2}$ a la suma. Per tant la suma demanada és la suma de tots els nombres de la llista excepte el primer i l'últim dels quals només n'hem de sumar la meitat. Si aquest valor ha de ser el més gran que es pot obtenir vol dir que els nombres dels extrems han de ser el més menuts que sigui possible, és a dir, en el cas de l'enunciat l'1 i el 2. La suma demanada serà, doncs, $\frac{1+2}{2}$ + la suma dels nombres del 3 al 2011. Si es fa aquest càlcul s'obté com a resultat $\frac{4046129}{2}$

1. Respostes: 30 i 24..

Si indiquem com $m \times n$ les dimensions del rectangle blanc, el nombre de rajoles blanques és $m \cdot n$ i el de rajoles grises és $2(m+2)+2n$. A partir de $m \cdot n = 2(m+2)+2n$, si operem i transposem termes obtenim $m \cdot n - 2m - 2n - 4 = 0$. A partir d'aquí podem escriure $m \cdot n - 2m - 2n + 4 = 8$ i això és $(m-2) \cdot (n-2) = 8$. Com que les descomposicions de 8 en dos factors són $8 \times 1 = 4 \times 2 = 2 \times 4 = 1 \times 8$, les possibles parelles per a $m \times n$ que compleixen la condició de l'enunciat són 10×3, 6×4, 4×6 i 3×10 i com que el que és demana és el nombre de rajoles blanques, les úniques possibilitats són 30 i 24.

2. Respostes: 2, 1.

Si comptem els nombres d'una xifra (9), més les xifres corresponents als nombres de dues xifres ($90 \cdot 2 = 180$), més les dels nombres de tres xifres ($900 \cdot 3 = 2.700$), més les dels de quatre xifres ($9.000 \cdot 4 = 36.000$), més les dels de cinc xifres ($90.000 \cdot 5 = 450.000$), més les dels de sis xifres ($900.000 \cdot 6 = 5.400.000$) tenim en total, fins aquí, 5.888.889 xifres posades a la llarga fila de xifres que construïm.

Veiem, doncs, que la xifra buscada correspondrà a un nombre de set xifres.

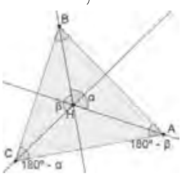
Per arribar a la 6.000.000a xifra ens falta posar $6.000.000 - 5.888.889 = 111.111$ xifres. Si dividim 111.111 per 7 ens dóna 15.873 de quocient i 0 de residu. Per tant ens interessa la darrera xifra del 15873è nombre de 7 xifres, que és 1.015.872 i la xifra demanada és 2.

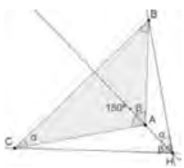
Per a la xifra 6.002.012, ens falten per posar $6.002.012 - 5.888.889 = 113.123$ xifres corresponents a nombres de set xifres. Si dividim 113.123 per 7 ens dóna 16.160 de quocient i 3 de residu. Això vol dir que hem de triar la 3a xifra del 16.161è nombre de set xifres, que és el 1.016.160 i per tant la xifra demanada és un 1.

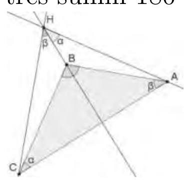
---

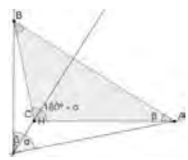
3. La primera cosa que calia fer era reconèixer, en funció de les dades, si el triangle era acutangle, obtús en A, obtús en B o obtús en C. Aleshores s'arribava a la solució del problema fent comptes de tots els angles de la figura o bé, més directament, aplicant la propietat que diu que angles de costats perpendiculars són iguals o bé suplementaris (propietat que implícitament s'estava demostrant si es feia tot el recompte dels angles de la figura).

Indiquem seguidament quins angles del triangle es poden determinar, per a cada una de les situacions, mitjançant l'aplicació directa de la propietat anterior a partir dels angles que es donaven. El tercer angle del triangle es calcula, naturalment, imposant que tots tres sumin 180°.









---

4. Primer apartat.

Per comptar quants rectangles hi ha observem que si triem dos punts de la base (de longitud m, on hi ha $m+1$ punts) i, independentment, dos punts de l'altura (de longitud n, on hi ha $n+1$ punts) queda determinat un rectangle de manera unívoca i recíprocament, donat un rectangle determina dos punts de la base i dos de l'altura.

Com que el nombre de maneres de triar dos punts de la base és $\binom{m+1}{2}$ i el nombre de maneres de triar dos punts de l'altura és $\binom{n+1}{2}$, el nombre total de rectangles que es poden formar és $\binom{m+1}{2} \cdot \binom{n+1}{2} = \frac{(m+1)\cdot m\cdot(n+1)\cdot n}{4}$.

4. Segon apartat.

Pel fer el recompte del nombre de quadrats caldrà triar parelles de punts, uns de la base i els altres de l'altura, a la mateixa distància. Cal fer-ho en funció d'aquesta distància.

- Parelles a distància 1: a la base, m; a l'altura, n.
- Parelles a distància 2: a la base, $m1$; a l'altura, $n-1$.
- Parelles a distància 3: a la base, $m-2$; a l'altura, $n-2$.

i així successivament fins a

- Parelles a distància $n-1$: a la base $m-(n-2)$; a l'altura 2.
- Parelles a distància n: a la base $m-(n-1)$; a l'altura 1.

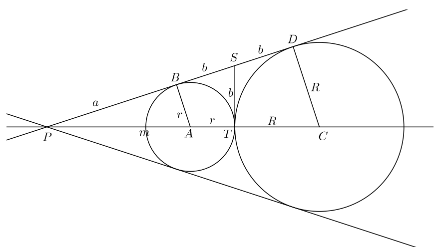
Si sumem totes les possibilitats obtenim que el nombre de quadrats és

$$m \cdot n + (m-1) \cdot (n-1) + ... + (m-n+2) \cdot 2 + (m-n+1) \cdot 1.$$

---

5. Resposta: $\dfrac{2Rr\sqrt{Rr}}{R-r}$.

En la figura s'han indicat els radis coneguts r, R i s'ha fet notar que, per la propietat de les tangents, hi ha tres segments de la mateixa longitud (indicats amb b).



Els triangles ABP, STP i CDP són tres triangles semblants perquè són rectangles i tenen un angle agut comú.

Per la semblança entre ABP i STR tenim $\dfrac{a+b}{m} = \dfrac{b}{r}$ d'on trobem que $b = \dfrac{r \cdot a}{m-r} = \dfrac{r\sqrt{m^2-r^2}}{m-r}$.

L'àrea demanada és el doble de l'àrea del triangle STP, és a dir

$$A = b(m+r) = \frac{r\sqrt{m^2-r^2}}{m-r} \cdot (m+r) = ... = r(m+r)\frac{\sqrt{m+r}}{\sqrt{m-r}}.$$

Per la semblança entre CDP i ABP tenim: $\dfrac{m+r+R}{m} = \dfrac{R}{r}$ d'on podem aillar m i trobem $m = \dfrac{r^2+Rr}{R-r}$ i d'aquí $m+r = \dfrac{2Rr}{R-r}$ i $m-r = \dfrac{2r^2}{R-r}$.

Si susbtituïm aquests valors en l'expressió de l'àrea A i simplifiquem arribem a $A = \dfrac{2Rr\sqrt{Rr}}{R-r}$.

---

6. *Nota: es dóna la solució del model concret que s'ha enunciat. De fet el problema depenia de la contrasenya de participació.*

Comencem per canviar l'equació de signe i obtenim:

$$36x^4 - 99x^2 + 160y^2 + 36z^2 + 72xy - 48yz + 81 = 0$$

Usarem la tècnica que es coneix com a completació de quadrats. Observem que el coeficient del terme en x^4 i el terme independent de l'expressió anterior són quadrats perfectes ($36 = 6^2$, $81 = 9^2$); "compensarem" convenientment el terme en x^2. Obtenim:

$$(6x^2 - 9)^2 + 9x^2 + 72xy + 160y^2 + 36z^2 - 48yz = 0$$

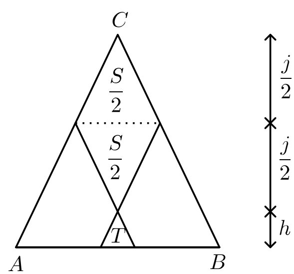
on el nou coeficient de x^2 és el quadrat d'un nombre enter ($9 = 3^2$). Ara completem un quadrat amb els termes en x^2 i xy i "compensem" el terme en y^2. Arribarem a: $(6x^2 - 9)^2 + (3x + 12y)^2 + 16y^2 + 36z^2 - 48yz = 0$.
Finalment observem que els termes en y^2, z^2 i en zy defineixen el quadrat perfecte d'un binomi. L'equació es pot transformar, doncs, en

$$(6x^2 - 9)^2 + (3x + 12y)^2 + (4y - 6z)^2 = 0$$

Perquè es compleixi la igualtat cadascun dels tres paréntesis ha de ser 0. Del primer parèntesis trobem dos possibles valors de x, cadascun dels quals ens dóna un valor per a y en el segon parèntesis i aquest ens dóna un valor per a z en el tercer parèntesis.
L'equació donada té, doncs, dues solucions, que racionalitzades són
$x = \frac{\sqrt{6}}{2}, y = -\frac{\sqrt{6}}{8}, z = \frac{\sqrt{6}}{12}$ i $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}, y = \frac{\sqrt{6}}{8}, z = -\frac{\sqrt{6}}{12}$.

---

7. Resposta: $2S + T + \sqrt{8ST}$.



El "mig-rombe" que resulta de partir el rombe mitjançant la diagonal horitzontal i el triangle ABC són semblants. Si h, j són l'altura del triangle petit i la diagonal vertical del rombe, la raó de semblança entre el mig rombe i el triangle petit, que és l'arrel quadrada de la raó de les àrees, és $k = \dfrac{j/2}{h} = \sqrt{\dfrac{S/2}{T}}$ d'on resulta que $\dfrac{j}{h} = \sqrt{\dfrac{2S}{T}}$.

La raó de semblança entre el triangle ABC i el triangle petit és

$$K = \frac{j+h}{h} = \sqrt{\frac{2S}{T}} + 1.$$

La raó de les àrees entre aquests dos triangles serà K^2 i l'àrea del triangle ABC serà $K^2 \cdot T$.
Si substituïm K pel seu valor i operem veurem que l'àrea demanada és

$$2S + T + \sqrt{8ST}.$$

---

8. Si el nombre $N = d...$ té $n+1$ xifres el podrem escriure com $N = d \cdot 10^n + M$ on M és el nombre que resulta de suprimir el d inicial.
S'ha de complir, doncs, $M = \dfrac{d \cdot 10^n + M}{a}$, d'on operant i aillant M es dedueix que ha de ser $M = \dfrac{d \cdot 10^n}{a-1}$. Aleshores:

I) En un dels apartats l'enunciat donava dos nombres d i a amb la propietat que d i $a-1$ eren primers entre ells i els mateix succeïa amb $a-1$ i 10. En aquest cas el problema no té solució.

II) Per a cada participant en l'altre apartat es donaven dos nombres d i a talment $\dfrac{d}{a-1} = \dfrac{1}{4}$. Aleshores s'observa que M ha de ser $M = \dfrac{10^n}{4}$ per a valors de $n = 2, 3, 4, \cdots$ és a dir $M \in \{25, 250, 2500, 25000, ...\}$ i, per tant, $N \in \{d25, d250, d2500, d25000, ...\}$, és a dir $N = d25 \cdot 10^k$ per a tots els valors de k enters positius o zero.

---

9. A partir del fet que per al polinomi $f(x)$ es compleix $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$ deduïm que a, b, c, d són arrels del polinomi $g(x) = f(x) - 5$ i, per tant, $g(x) = (x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) \cdot (x-d) \cdot h(x)$. La Regla de Ruffini ens diu que si dividim un polinomi amb coeficients enters per un binomi de la forma $x - m$ el quocient també té els coeficients enters. Així doncs $h(x)$ serà un polinomi amb tots els coeficients nombres enters.
Podem, doncs, escriure $f(x) = (x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) \cdot (x-d) \cdot h(x) + 5$ i, aleshores, si volem resoldre $f(x) = 8$ això equival a resoldre

$$(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) \cdot (x-d) \cdot h(x) = 3.$$

Com que $h(x)$ té coeficients enters, i com que a, b, c, d són diferents una solució entera d'aquesta equació ens portaria a una descomposició del número 3 com a producte de cinc factors enters, quatre d'ells diferents, cosa que és del tot impossible perquè els únics divisors del 3 són 1, -1, 3 i -3 i per a obtenir com a producte 3 només podem fer servir o bé el 3 o bé el -3.

---

10. En cas que X sigui l'extrem del diàmetre perpendicular a AB les tres rectes de l'enunciat són paral·leles, com es demostra fàcilment, a partir del fet que la tangent és perpendicular al radi i que els dos triangles rectangles AZB i BYA són iguals (figura 1). Altrament veurem (figura 2 i figura 3) que les rectes indicades a l'enunciat són concurrents.

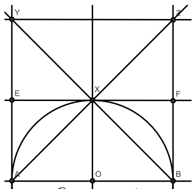


figura 1

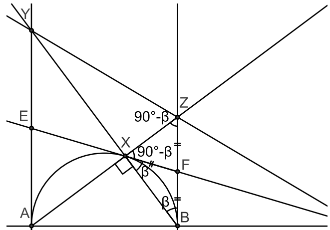


figura 2

Les rectes AZ i BY són perpendiculars perquè l'angle que formen en X és un angle inscrit que abraça mitja circumferència.
El triangle XFB és isòsceles perquè els dos segments XF i FB corresponen als segments de les tangents des del punt F a la circumferència del problema i, per tant, són iguals. Indiquem com β els dos angles iguals d'aquest triangle.
Els dos angles assenyalats en el triangle XZF són iguals a $90° - \beta$; un és el complementari de l'angle β en X; l'altre és un angle agut del triangle rectangle BXZ del qual l'altre angle agut és β.
Es dedueix que els segments BF, XF i FZ són iguals i, per tant, F és el punt mitjà de BZ.

Semblantment veuríem que E és el punt mitjà de AY.

El teorema de Tales ens permet assegurar que les rectes AB, YZ i EF (la tangent pel punt X) són concurrents, perquè ens diu que per qualsevol paral·lela que fem a les rectes AY i BZ, la intersecció d'aquesta recta amb la recta EF és el punt mitjà de les interseccions amb les rectes AB i YZ.

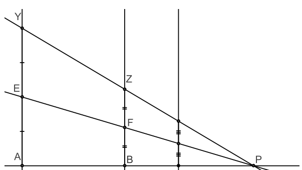


figura 3

Per tant, si P és el punt d'intersecció de AB i EF, també ha de ser el punt d'intersecció de EF i YZ.

XLVIII Olimpíada Matemàtica

Fase catalana. Desembre 2011. Enunciats

1. Siguin a, b i c tres nombres reals positius el producte dels quals és 1. Demostra que, si la suma d'aquests nombres és més gran que la suma dels seus recíprocs, aleshores exactament un d'ells és més gran que 1.

2. En un triangle rectangle d'hipotenusa unitat i angles de 30°, 60° i 90°, s'elegeixen 25 punts qualssevol. Demostra que sempre n'hi haurà 9 d'ells que podran cobrir-se amb un semicercle de radi $\frac{3}{10}$.

3. Sigui ABC un triangle arbitrari.

a) Si H n'és l'ortocentre, quant val la distància AH?

b) Si P n'és un punt interior i H_A, H_B i H_C són, respectivament, els ortocentres dels triangles PBC, PAC i PAB, demostra que els triangles $H_AH_BH_C$ i ABC tenen la mateixa àrea.

4. Sigui $ABCD$ un quadrilàter convex i P un punt interior. Determineu quines són les condicions que han de complir el quadrilàter i el punt P perquè els quatre triangles PAB, PBC, PCD i PDA tinguin la mateixa àrea.

5. Tenim una col·lecció d'esferes iguals que apilem formant un tetràedre les arestes del qual tenen totes n esferes. Calculeu, en funció de n, el nombre total de punts de tangència (contactes) que hi ha entre les esferes de la pila.

6. Siguin a, b i c les longituds dels costats d'un triangle ABC. Si

$$b(a+b)(b+c) = a^3 + b\left(a^2+c^2\right) + c^3,$$

demostra que les mesures (en radians) dels angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ compleixen la relació

$$\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} = \frac{2}{\sqrt{C}+\sqrt{A}}$$

XLVIII Olimpíada Matemàtica

Fase catalana. Els resultats

La fase catalana de la XLVIII Olimpíada Matemàtica, amb l'organització de la Societat Catalana de Matemàtiques es va celebrar simultàniament a Barcelona, Girona, Lleida i Tarragona els dies 16 i 17 de desembre de 2011.

El tribunal qualificador, que estava presidit pel Dr. Josep Pla Carrera (Universitat de Barcelona), va prendre l'acord d'atorgar els premis següents:

- **Primers premis**

  Eric Milesi Vidal,
  Col·legi Pare Manyanet (Barcelona), 1r de batxillerat
  Júlia Alsina Oriol,
  Institut Jaume Callís (Vic), 1r de batxillerat
  Darío Nieuwenhuis Nivela,
  Aula Escola Europea (Barcelona), 1r de batxillerat

- **Segons premis**

  Marc Felipe Alsina,
  Institut Jaume Vicens Vives (Girona), 1r de batxillerat
  Eudald Romo Grau,
  Institut Jaume Vicens Vives (Girona), 2n de batxillerat
  Eduardo Adamo Atao Salazar,
  Col·legi Sagrat Cor de Jesús (Terrassa), 2n de batxillerat

- **Tercers premis**

  Jordi Barceló Mercader,
  Col·legi Jesús i Maria (Sant Andreu, Barcelona), 2n de batxillerat
  Aitor Azemar Carnicero,
  Institut Arnau Cadell (Sant Cugat del Vallès), 2n de batxillerat
  Pau Surrell Rafart,
  Institut Jaume Vicens Vives (Girona), 1r de batxillerat

XLVIII Olimpíada Matemàtica

Fase catalana. Solucions

1. Atès que $abc = 1$ i $a + b + c > \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$, tenim que

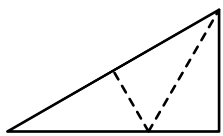
$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1) &= abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1\\ &= a + b + c - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 0.\end{aligned}$$

La desigualtat anterior es compleix quan un dels factors del nombre

$$(a-1)(b-1)(c-1)$$

és positiu o tots tres factors són positius. Si fossin positius tots tres, tindríem $a > 1, b > 1$ i $c > 1$, cosa que no és possible perquè $abc = 1$. Per tant, només un d'ells és positiu i això acaba la demostració.

2. Aquest triangle es pot descompondre en tres triangles congruents i semblants al triangle inicial.

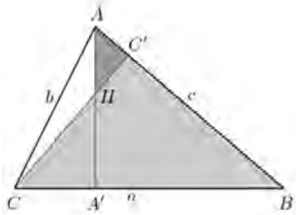


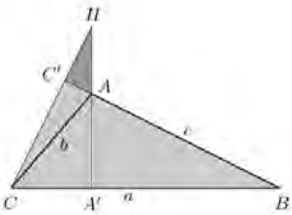
Tenim 3 triangles i 25 punts. En algun triangle hi haurà almenys 9 punts. La hipotenusa de cada un d'aquests triangles semblants a l'inicial mesura $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Els triangles són rectangles i per tant estan coberts per la meitat del cercle circumscrit. Això acaba el que es demana ja que el radi d'aquest cercle circumscrit, r, compleix $r = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{3}{10}$.

3. a) Calculem la distància d'un vèrtex A a l'ortocentre del triangle ABC.
A les figures següents podem observar que els triangles BCC' i AHC' són semblants. (Recordem que els angles de costats perpendiculars són iguals o suplementaris). D'aquesta semblança resulta

$$\frac{AH}{CB} = \frac{AC'}{CC'} \Leftrightarrow \frac{AH}{a} = \frac{AC'}{CC'}$$

i, per tant $AH = a\dfrac{AC'}{CC'}$.





Substituint, queda $AH = a \cot A$.
Si el triangle ABC és rectangle a A, la fórmula és també vàlida, però en aquest cas és $A = H$ i $AH = a \cot 90° = 0$. Si és obtusangle, el punt H és exterior al triangle i queda $AC' = b\cos(180° - A)$ i $CC' = b\sin(180° - A)$, i per tant, $AH = -a \cot A$. Però en aquest cas $\cot A$ és negativa.
Les distàncies de l'ortocentre H als vèrtexs aguts d'un triangle rectangle o obtusangle surten d'una manera semblant.

---

b) Quan unim el punt arbitrari P amb els vèrtexs A, B i C del triangle obtenim els tres triangles PAB, PBC i PCA.
Siguin $\alpha = \angle BPC, \beta = \angle APC, \gamma = \angle APB$. Òbviament, $\alpha + \beta + \gamma = 360°$. D'aquests tres angles, com a mínim dos són obtusos. L'altre pot ser obtús, recte o agut. Estudiarem els tres casos per separat.

b1) Suposem que els tres angles són obtusos (Figura 1).

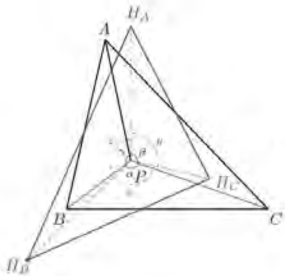


Figura 1

Pel que hem dit a l'apartat a) tenim $PH_A = -a \cot \alpha$ i $PH_C = -c \cot \gamma$. Fixem-nos que l'angle $y = \angle H_A P H_C = 180° - \angle APC = 180° - B$ ja que els costats $H_A P$ i $H_C P$ són, respectivament, perpendiculars als costats, BC i AB i l'un és obtús i l'altre és agut.

L'àrea $\mathcal{A}(PH_AH_C)$ del triangle PH_AH_C és, òbviament,

$$\mathcal{A}(PH_AH_C) = \frac{\overline{PH}_A\,\overline{PH}_C \sin y}{2} =$$
$$= \frac{ac \cot \alpha \cot \gamma \sin B}{2} = \mathcal{A}(ABC) \cot \alpha \cot \gamma.$$

Sumant, doncs, les àrees dels tres triangles PH_AH_B, PH_BH_C i PH_CH_A obtenim

$$\mathcal{A}(H_AH_BH_C) = \mathcal{A}(PH_AH_B) + \mathcal{A}(PH_BH_C) + \mathcal{A}(PH_CH_A) \text{ i}$$
$$\mathcal{A}(H_AH_BH_C) = \mathcal{A}(ABC)\Big(\cot\alpha\cot\beta + \cot\beta\cot\gamma + \cot\gamma\cot\alpha\Big).$$

Aleshores, com que $\alpha + \beta = 360 - \gamma$ tenim que $\cot(\alpha+\beta) = -\cot\gamma$ o, equivalentment, $\cot\gamma = -\cot(\alpha+\beta) = \frac{1-\cot\alpha\cot\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}$ o bé
$\cot\alpha\cot\beta + \cot\beta\cot\gamma + \cot\gamma\cot\alpha = 1.$ (*)
D'aquí resulta $\mathcal{A}(H_AH_BH_C) = \mathcal{A}(ABC)$.

b2) Suposem que un dels angles és recte, per exemple $\beta = 90°$. Aleshores $H_B = P$ i $\mathcal{A}(H_AH_BH_C) = \mathcal{A}(H_APH_C) = \dfrac{\overline{PH}_A\,\overline{PH}_C \sin y}{2} =$

$$= \frac{ac\cot\alpha\cot\gamma\sin B}{2} = \mathcal{A}(ABC)\cot\alpha\cot\gamma$$

Però la mateixa identitat (*) ens diu que si $\cot\beta = 0$ ha de ser $\cot\alpha\cot\gamma = 1$, i d'aquí el resultat en aquest cas.

b3) Suposem ara que un dels angles α, β, γ és agut, per exemple l'angle $\widehat{APC} = \beta < 90°$ (Figura 3). El punt P és exterior al triangle $H_AH_BH_C$ i tenim $\mathcal{A}(H_AH_BH_C) = \mathcal{A}(PH_AH_C) - \mathcal{A}(PH_AH_B) - \mathcal{A}(PH_CH_B)$.

Figura 2

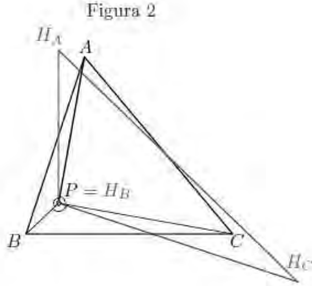
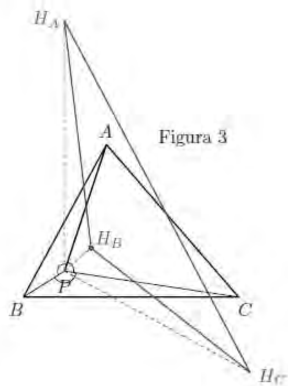


Figura 3



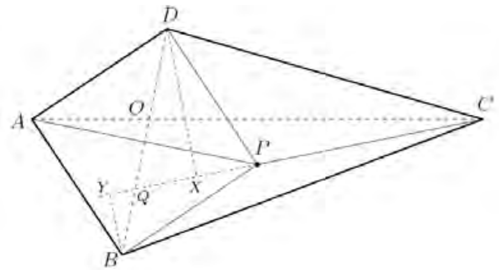
Però en aquest cas tenim $PH_B = b\cot\beta$, $PH_A = -a\cot\alpha$ i $PH_C = -c\cot\gamma$ i, per tant,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(H_AH_BH_C) &= \mathcal{A}(PH_AH_C) - \mathcal{A}(PH_AH_B) - \mathcal{A}(PH_CH_B) = \\ &= \big(\cot\alpha\cot\gamma - (-\cot\alpha\cot\beta) - (-\cot\gamma\cot\beta)\big)\mathcal{A}(ABC) = \\ &= (\cot\alpha\cot\beta + \cot\beta\cot\gamma + \cot\gamma\cot\alpha)\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ABC).\end{aligned}$$

4. Considerem, d'antuvi, els triangles PCD i PCB. Tenen la base comuna PC i altures corresponents DX i BY. Si volem que tinguin la mateixa àrea cal que les altures siguin iguals. Per tant, el punt Q ha de ser el punt mitjà de la diagonal BD. La recta CP passa per Q.

Anàlogament, considerem els triangles ADP i PAB de base comuna AP. Pel mateix argument d'abans, han de tenir altures iguals i AP ha de passar per Q. En resulta que AP i CP tenen dos punts en comú: P i Q. Els segments AP i PC estan, doncs, alineats. És a dir, és la diagonal AC.

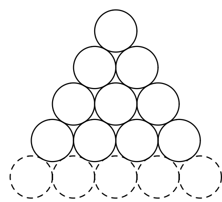
Cal doncs, que les dues diagonals es tallin en el punt mitjà d'una d'elles. Però mirant els triangles PDA i PDC, que han de tenir la mateixa àrea, resulta que P ha de ser el punt mitjà de AC.



La condició demanada és que les diagonals del quadrilàter es tallin en el punt mitjà d'una d'elles i el punt P sigui el punt mitjà de l'altra.

5. El problema en el pla.

D'antuvi, analitzem el problema en el cas pla, que és molt senzill. Sigui A_n el nombre de contactes de n esferes col·locades en un triangle pla amb n esferes en cada un dels costats (figura de la dreta). Fixem-nos que el nombre total d'esferes és, evidentment, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.



Podem procedir per inducció. Si hi ha $n = 2$ files el nombre de contactes és 3; és a dir, $A_2 = 3$. Fixem-nos que, curiosament, coincideix amb el nombre de boles del triangle de dues files.

En un triangle de $n-1$ files hi ha A_{n-1} contactes. Òbviament, en un triangle de n files hi haurà els contactes que ja hi ha en un triangle de $n-1$ files, més els que provinguin d'afegir la darrera fila, tal com està indicat a la figura anterior.

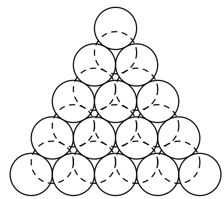
Però és clar que, en afegir aquesta darrera fila es produeixen contactes de dues menes:

- Els que hi ha entre les boles de la fila n-èsima, que són $n-1$.
- Els que tenen les boles de la fila n-èsima amb l'anterior, que són $2(n-1)$.

Així doncs, $A_n = A_{n-1} + 3(n-1)$, o bé, $A_n - A_{n-1} = 3(n-1)$.
Sumant queda $A_n = 3\big((n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\big) = 3\frac{n(n-1)}{2} = 3T_{n-1}$.

El problema en l'espai tridimensional.

Ara ja podem analitzar el cas a l'espai. Sigui C_n el nombre de contactes d'una pila tetraèdrica d'esferes l'aresta de la qual té n esferes. A la figura de la dreta hi hem representat les esferes de la base en traç continu i les del pis immediat superior en traç discontinu, mirant-ho a vista d'ocell. Quan afegim el pis n-èsim, afegim contactes de dues menes:



- Els propis del pis – un triangle pla de n boles de costat.
- Els que provenen de contactes entre el pis $n-1$ i el pis n.

Els contactes del primer tipus són, com hem vist en el cas pla, $A_n = 3T_{n-1}$.
El nombre de contactes entre un pis i l'anterior és $3T_{n-1}$, ja que cada bola del pis $n-1$ toca exactament tres vegades les boles del pis n. (Vegeu la figura.) En total, doncs, el nombre de contactes és $C_n - C_{n-1} = A_n + 3T_{n-1} = 3n(n-1)$.
Si sumem queda

$$C_n - C_2 = 3n(n-1) + \cdots + 3\cdot 3(3-1) = 3(n^2+\cdots+3^2) - 3(n+\cdots+3),$$

o bé

$$C_n = 3(n^2+\cdots+2^2+1^2) - 3(n+\cdots+2+1) = 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2}$$

que, si operem, resulta $C_n = n^3 - n$.

Un altre camí.

La recurrència $C_n = C_{n-1} + 3n(n-1)$ es pot resoldre escrivint C_n com un polinomi cúbic i calculant-ne els coeficients a partir de la recurrència i de la condició inicial $C_1 = 0$.
Si fem $C_n = an(n-1)(n-2) + bn(n-1) + cn + d$, la condició de recurrència dóna $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$, i la condició $C_1 = 0$ dóna $d = 0$. En resum

$$C_n = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) = n^3 - n.$$

6. La condició de l'enunciat es pot escriure en la forma

$$b^3 + b^2a + b^2c + abc - a^2b - bc^2 - a^3 - c^3 = 0$$

o, equivalentment,

$$b^2(a + b + c) - (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) + b^3 - 2abc - a^2b - b^2c = 0.$$

Si substituïm la identitat $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$, s'obté

$$b^2(a+b+c)-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+b(a+b+c)(b-a-c) = 0$$

o, equivalentment, $(a + b + c)(b^2 - a^2 - c^2 + ac) = 0$. Atès que $a + b + c \neq 0$, cal que $b^2 - a^2 - c^2 + ac = 0$, d'on, pel teorema del cosinus, resulta que

$$\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \frac{1}{2} = \cos B$$

Per tant, $B = \pi/3$. Sabem que $A + B + C = \pi$ i d'això en resulta $A + C = 2\pi/3 = 2B$. És a dir, els angles A, B, C estan en progressió aritmètica.

Però la igualtat que cal demostrar equival, precisament, a que A, B, C estiguin en progressió aritmètica. Efectivament, si suposem que $B = A+d$ i $C = A+2d$ amb $d \geq 0$, tenim

$$\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} = \frac{\sqrt{B}-\sqrt{A}}{B-A} + \frac{\sqrt{C}-\sqrt{B}}{C-B}$$
$$= \frac{\sqrt{C}-\sqrt{A}}{d} = \frac{C-A}{d(\sqrt{C}+\sqrt{A})} = \frac{2}{\sqrt{C}+\sqrt{A}}$$

Si fos $d = 0$, el triangle seria equilàter i l'enunciat es compliria trivialment.

Problemes a l'esprint

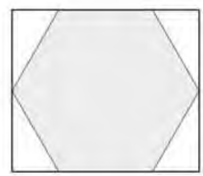
Equips d'alumnes de 3r i 4t d'ESO. Febrer de 2012.

Problemes de la branca d'olivera

1. En un calaix hi ha 5 guants blancs de la mà dreta, 6 guants blancs de la mà esquerra, 7 guants negres de la mà dreta i 8 guants negres de la mà esquerra. Quin és el mínim nombre de guants que hem de treure, a les fosques, per estar segurs que tindrem una parella de guants (un de la mà dreta i un de la mà esquerra) del mateix color?

La solució d'aquest problema 1 s'ha de passar al problema 7 com a nombre A.

2. La figura mostra un hexàgon regular i un rectangle. Si l'àrea del rectangle és de 64 cm^2, quina és l'àrea de l'hexàgon regular?



3. *Per resoldre aquest problema cal conèixer un nombre K que passa del problema 5.*

A, B, C i D són quatre punts diferents que estan en una mateixa línia recta. Sabem que la distància de A a B és de 2 unitats, que la de B a C és de 3 unitats i que la de C a D és de K unitats (K és el nombre que passa del problema 5). Coneguda la posició del punt A s'estudien totes les posicions possibles per al punt D i per cada posició es mesura la distància de A a D. Després se sumen totes aquestes distàncies. Quin és el resultat d'aquesta suma?

4. En una bossa hi ha 2009 boles blanques i 2012 boles negres. La Joaneta vol afegir a la bossa unes quantes boles (que poden ser totes blanques o totes negres o algunes de cada color) de manera que la proporció entre el nombre de boles blanques i el nombre de boles negres a la bossa passi a ser de $\frac{4}{5}$. Quin és el mínim nombre de boles que ha d'afegir per a aconseguir-ho?

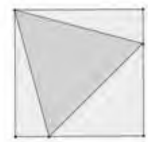
La resposta d'aquest problema passa com a valor M al primer repte (problema 9).

Problemes del colom de la pau

5. Quants nombres enters de 7 xifres (és a dir compresos entre 1000000 i 9999999) podem formar amb les xifres 1, 1, 2, 2, 2, 0 ,0 i que siguin capicues?

La solució d'aquest problema s'ha de passar al problema 3 com a nombre K.

6. Hem dibuixat un triangle equilàter que té un vèrtex en un dels vèrtexs d'un quadrat i els altres dos vèrtexs sobre costats del quadrat, com a la figura. Quin percentatge (arrodonit a un enter) de l'àrea del quadrat està ocupada pel triangle equilàter?



7. *Per resoldre aquest problema cal conèixer un nombre A que passa del problema 1.*

Si x és un nombre real que compleix $x + \dfrac{1}{x} = A$ on A és el valor que passa del problema 1, quin és el valor exacte de $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$?

8. A l'antiga Roma un patrici deixa a la seva mort 3500 denaris a la seva vídua. La vídua estava embarassada del seu difunt marit. D'acord amb la llei romana aquesta dona ha de repartir l'herència de la manera següent:

- Si té un fill ella es queda la meitat del que li ha de donar al seu fill
- Si té una filla, ella es queda el doble del que li dóna a la filla.

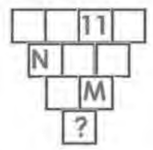
Però casualment té bessons: un fill i una filla. Com s'ha de repartir l'herència perquè es compleixin tots els requisits de la llei?

La quantitat que correspon a la filla passa com a valor N al problema 9.

Reptes finals

Per trobar la resposta numèrica del problema 9 cal conèixer el valor de dos nombres M i N que passen dels problemes 4 i 8.

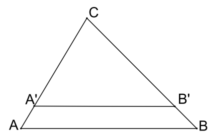
9. A cada casella de la figura adjunta hi hem de posar un nombre enter positiu de manera que, a part dels de la fila superior, el nombre d'una casella sigui la suma dels dos nombres de les caselles superiors que hi estan en contacte. Ja sabem tres nombres, un 11, el nombre M que passa del problema 4, i el nombre N que passa del problema 8.



Quin és el nombre més gran que podrem fer que aparegui a la casella inferior?

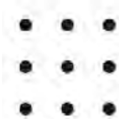
La resposta d'aquest problema passa a l'exercici següent com a valor S.

10. En la figura adjunta, AA' és la cinquena part de AC i BB' és la cinquena part de BC.
L'àrea del triangle ABC és de S cm^2, on S és el resultat del problema anterior .
Quina és l'àrea del quadrilàter $ABB'A'$?



Reptes fora de concurs

11. Si escollim aleatòriament dos punts de la figura, on cada parella dels més propers estan a distància 1, quina és la probabilitat que els dos punts seleccionats estiguin a distància 1?



12. Sabem que el polinomi $p(x) = x^2 + 20x + t$ té dues arrels enteres diferents.
Quin és el màxim valor que pot tenir el terme independent, t?
Quin és el mínim valor que pot tenir el terme independent, t?

Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes de 3r i 4t d'ESO. Febrer de 2012.

Participació i resultats

En aquesta vintena edició dels *Problemes a l'esprint* per a alumnes de 3r i 4t d'ESO, celebrada el 18 de febrer de 2012, van participar 60 equips, de 57 centres de Catalunya i el País Valencià. En la inscripció es van fer constar més de 1100 alumnes participants.

El formulari informàtic va indicar que havien enviat totes les respostes un total de 36 equips, dels quals 14 també van enviar la resposta als reptes fora de concurs.

Centres més destacats

L'**equip guanyador** de l'activitat és el del centre:
Institut Pau Vila, de Sabadell (Vallès Occidental)
que va enviar totes les respostes correctes, al primer intent, amb un temps de concurs que no va arribar als tres quarts d'hora.

Es fa un reconeixement especial, a manera de **pòdium de l'activitat**, dels equips dels centres
Aula Escola Europea, de Barcelona (Barcelonès)
La Salle Girona, de Girona (Gironès)
Institut Samuel Gili i Gaya, de Lleida (Segrià)
que han tingut encert ple, al primer intent, amb un temps de concurs entre 46 i 51 minuts.

Altres equips que van encertar totes les respostes

IES Bellaguarda d'Altea (Marina Baixa)
Institut Rafael Campalans d'Anglès (La Selva)
Institut Badalona VII de Badalona (Barcelonès)
IEA Oriol Martorell de Barcelona (Barcelonès)
Institut Montserrat de Barcelona (Barcelonès)
Institut Arquitecte Manuel Raspall de Cardedeu (Vallès Oriental)
Colegio Madre Vedruna Sagrado Corazón de Castelló de la Plana
IES Vicent Castell Domènech de Castelló de la Plana (La Plana Alta)
IES Blasco Ibáñez de Cullera (Ribera Baixa)
Santo Angel de Gavà (Baix Llobregat)
Institut Santa Eugènia de Girona (Gironès)
Institut Jaume Vicens Vives de Girona (Gironès)
Institut Pere Fontdevila de Gironella (Berguedà)
Col·legi Jardí de Granollers (Vallès Oriental)
IES Miquel Peris i Segarra del Grau de Castelló (Plana Alta)
Institut El Pedró de L'Escala (Alt Empordà)
Institut Ramon Coll de Lloret de Mar (La Selva)
Institut Montserrat Miró i Vilà de Montcada i Reixac (Vallès Occidental)
Institut Baix Empordà de Palafrugell (Baix Empordà)
Escola Puigcerver de Reus (Baix Camp)
Institut Domènech i Montaner de Reus (Baix Camp)
Col·legi Regina Carmeli de Rubí (Vallès Occidental)
Escola l'Avet Roig de Sant Celoni (Vallès Oriental)
Institut de Sant Quirze del Vallès (Vallès Occidental)
Institut Gabriela Mistral de Sant Vicenç dels Horts (Baix Llobregat)
Escola Tecnos de Terrassa (Vallès Occidental)
Sagrat Cor de Terrassa de Terrassa (Vallès Occidental)
Institut Narcís Oller de Valls (Alt Camp)
IES Broch i Llop de Vila-real (La Plana Baixa)

Problemes a l’esprint

Equips d’alumnes de 3r i 4t d’ESO. Febrer de 2012.

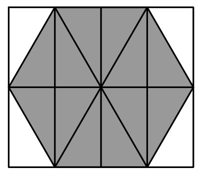
Les solucions

1. 15 guants.

El cas més desfavorable seria treure en primer lloc tots els guants de la mà esquerra (14 en total). Però aleshores el següent guant que traguéssim ja ens permetria fer una parella de guants del mateix color.

2. 48 cm^2.

La figura mostra l’hexàgon regular dividit en sis triangles equilàters i dotze triangles rectangles iguals, que també són iguals als quatre que queden fora de l’hexàgon i a l’interior del rectangle.



Si el rectangle està format per 16 triangles iguals i té àrea 64 cm^2 i l’hexàgon el componen 12 d’aquests triangles, tindrà una àrea de 48 cm^2.

3. 36.

Si imaginem els punts situats sobre una recta en què $A = 0$, els possibles valors de B són $B = 2$ i $B = -2$.

Si $B = 2$ els possibles valors de C, que hi ha d’estar a distància 3, són $C = 5$ i $C = -1$.

Si $B = -2$ els possibles valors de C són $C = -5$ i $C = 1$.

Aleshores, com que del problema 5 passa $K = 4$, els possibles valors de D són:

Per $C = -5$, pot ser $D = -9$ i $D = -1$.

Per $C = -1$, pot ser $D = -5$ i $D = 3$.

Per $C = 1$, pot ser $D = -3$ i $D = 5$.

Per $C = 5$, pot ser $D = 1$ i $D = 9$.

Veiem que hi ha vuit posicions possibles per al punt D que queden a distàncies 9, 1, 5, 3, 3, 5, 1 i 9 del punt A. La suma d’aquestes distàncies és 36.

4. 506.

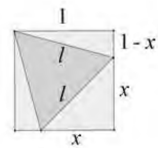
L'enunciat ens diu que hem de buscar nombres enters no negatius, b i n, de manera que $\dfrac{2009+b}{2012+n} = \dfrac{4}{5}$. Com que 4 i 5 són primers entre ells, haurà d'existir un nombre natural k que compleixi $2009+b = 4k$ i $2012+n = 5k$. Com que volem que el nombre total de boles que afegim sigui el mínim possible i com que si b augmenta també augmentarà n, i recíprocament, provarem amb el primer múltiple de 4 posterior a 2009, és a dir 2012 en el numerador. Tenim $\dfrac{4}{5} = \dfrac{2012}{2515}$, cosa que ens diu $b = 3$ i $n = 503$; hem afegit 506 boles i aquesta és la solució perquè per a múltiples de 5 més petits que el que hem trobat correspondria un numerador més petit que 2009, cosa que aniria contra l'enunciat, perquè hem de posar boles, no en podem treure.

Problemes del colom de la pau

5. 4 nombres.

La simetria en la ordenació de les xifres que s'ha de donar perquè el nombre sigui capicua força a que la xifra central sigui un 2. Abans del 2 han d'anar-hi un 1, un altre 2 i un 0, que no pot anar al primer lloc; es veu que les possibilitats són 102, 120, 201 i 210. Quan hem situat aquestes xifres ja queda completat el coneixement del nombre.

6. 46%.



Podem suposar sense perdre generalitat que el costat del quadrat és 1 i per tant la seva àrea també serà 1.
Si apliquem el teorema de Pitàgores en els dos triangles rectangles de la figura tindrem $2x^2 = l^2$ i $1+(1-x)^2 = l^2$. Si igualem i resolem l'equació que resulta trobem $x = \sqrt{3}-1$, i podem obtenir el valor exacte del costat l.

Podem calcular l'àrea del triangle fent servir que és equilàter, i serà $\mathcal{A}= \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$ o bé restant de l'àrea del quadrat les dels tres triangles rectangles i obtindrem $\mathcal{A}= 1 - \dfrac{x^2}{2} - 2 \cdot \dfrac{1-x}{2}$. Resulta $\mathcal{A}= 2\sqrt{3} - 3 = 0{,}4641$, valor que arrodonit a un percentatge enter correspon al 46% de l'àrea del quadrat, que és 1.

7. 223.

Pel valor que passa del problema 1 tenim $x + \dfrac{1}{x} = 15$.

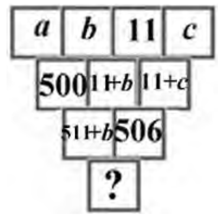
Si elevem al quadrat obtenim $225 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}$ i d'aquí resulta de seguida $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 225 - 2 = 223$.

8. Fill: 2000; Filla: 500; Mare: 1000.

Si indiquem com x el que es queda la filla, a la mare li correspondrà $2x$ i al fill el doble que a la mare, és a dir $4x$. S'observa doncs, que si fem 7 parts iguals de l'herència ($x = 500$) quatre parts seran per al fill, dues per a la mare i una per a la filla.

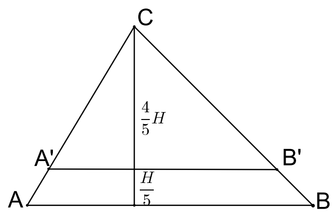
Reptes finals

9. 1500.



Si indiquem amb a, b, c els valors de les tres caselles superiors desconegudes, a la casella amb l'interrogant hi va $511 + b$ i, doncs, assolirà el valor màxim quan b sigui al més gran possible. Com que $a + b = 500$ ha de ser $b < 500$ però com que a més $11 + b + 11 + c = 506$, és a dir $b + c = 484$, ha de ser $b < 484$. El màxim valor que pot tenir és $b = 483$, i aleshores a la casella de l'interrogant hi tindrem $511 + b + 506 = 1500$.
Observeu que tot el tauler es pot completar correctament amb $a = 17, b = 483, c = 1$.

10. 540.

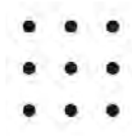


Com que $AA' = AC/5$ i $BB' = BC/5$ l'invers del Teorema de Tales ens diu que $A'B'$ és paral·lela a AB i, doncs, $ABB'A'$ és un trapezi els triangles $A'B'C$ i ABC són semblants.
Com que $A'C = 4AC/5$, la raó de semblança és $k = \dfrac{4}{5}$.

Per tant, si h és l'altura del triangle $A'B'C$ i H ho és del triangle ABC serà $h = 4H/5$ i l'altura del trapezi $ABB'A'$ serà $H/5$. També tenim que $A'B'$, base del triangle de dalt i base menor del trapezi, és $4AB/5$.
Així l'àrea del trapezi és $\dfrac{AB + 4AB/5}{2} \cdot H/5 = \dfrac{9}{25}\dfrac{AB \cdot H}{2}$, és a dir $\dfrac{9}{25}$ parts de l'àrea del triangle. Com que del problema anterior passa $S = 1500$, l'àrea demanada serà $\dfrac{9}{25} \cdot 1500 = 540$.

Reptes fora de concurs

11. $\frac{1}{3}$.



Les parelles que estan a distància 1 són:
- Cada vèrtex del quadrat amb els dos punts mitjans dels costats adjacents
- El punt del centre amb els quatre punts mitjans dels costats

Això dóna un total de 12 parelles que constitueixen els casos favorables de la situació de l'enunciat.
El nombre de parelles que podem triar a partir dels 9 punts és de $\binom{9}{2} = 36$.
La probabilitat demanada és, doncs, $p = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

12. Màxim 99; mínim, no n'hi ha.

La suma de les dues arrels del polinomi $p(x) = x^2 + 20x + t$ és -20 i t n'és el seu producte.
Aleshores el màxim valor que pot tenir t coincideix amb el màxim del producte de dos nombres enters que sumin -20 i que, segons l'enunciat, siguin diferents.
Aquest valor s'assoleix quan les dues arrels són -9 i -11 i el producte màxim, és a dir t en aquest cas, és 99.
El terme independent, t, no té un valor mínim perquè si pensem en les arrels a i $-a-20$, de manera que a sigui un nombre enter positiu, el producte, $-a^2-20a$ pot assolir valor negatius tan grans en valor absolut com es vulgui.

Problemes a l'esprint

Equips de batxillerat. Febrer/Març de 2012.

Problemes de la branca d'olivera

1. Quants zeros té el polinomi de grau 8 següent?

$$P(x) = (((x-2012)^2-2)^2-4)^2$$

La solució d'aquest problema passa al problema 7 com a nombre m.

---

2. Hi ha 6 sospitosos d'un robatori, A, B, C, D, E i F i se sap que dos i només dos són culpables. El jutge els ha anat interrogant i en aquests interrogatoris els innocents han dit la veritat.
Han declarat el següent:
A diu que C és innocent.
B diu que D és innocent.
C diu que E és innocent.
D diu que F és innocent.
E diu que A és innocent.
En aquest moment el jutge diu: «*Ja sé qui són els dos culpables!*»
Quins són els dos sospitosos que el jutge dedueix que són culpables?

---

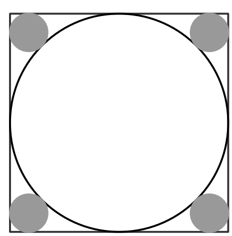
3. *Per resoldre aquest problema cal conèixer un nombre T que passa del problema 5.*

L'Enric, la Fàtima, en Gerard i l'Helena són germans i s'han aplegat per celebrar l'aniversari del més menut, l'Enric.
Si sumen les seves edats per parelles obtenen T, 24, 26, 27, 29 i 30. Quants anys fa avui l'Enric?

---

4. En un quadrat hem dibuixat un cercle tangent als quatre costats del quadrat i quatre cercles tangents al cercle anterior i a dos costats del quadrat. Quin percentatge de l'àrea del quadrat (arrodonit a un nombre enter) està ombrejada?

La resposta d'aquest problema passa com a valor A al primer repte (problema 9).

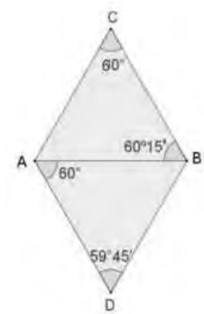


Problemes del colom de la pau

5. En una línia de tren només es venen bitllets senzills per anar d'una estació a una altra. Cada bitllet té impresos el nom de l'estació d'origen i el de l'estació d'arribada. Per exemple si Bonicpla i Vilabella són dues estacions, hi hauria un bitllet per anar de Vilabella a Bonicpla i un altre diferent per anar de Bonicpla a Vilabella.
En una ampliació de la línia es van afegir noves estacions, més d'una però meys de la tercera part de les que ja hi havia. Per a la inauguració de les noves estacions es van haver d'imprimir exactament 200 nous tipus de bitllets. Quantes estacions hi ha en total a la línia de tren després de la inauguració de les noves?

La solució d'aquest problema s'ha de passar al problema 3 com a nombre T.

6. En Joan volia dibuixar dos triangles equilàters adossats per tal dobtenir, així, un rombe. Però no va encertar ben bé la mesura de les distàncies i, una volta ho havia fet, la Joana va mesurar amb un instrument de molta precisió quatre angles i va veure que no eren iguals. Quin dels cinc segments de la figura és el més llarg?



7. *Per resoldre aquest problema cal un nombre m que passa del problema 1.*

Calcula el vèrtex d'una paràbola per a la qual:

- L'equació de la tangent en el punt d'abscissa 0 és $y = -mx + 1$
- L'equació de la tangent en el punt d'abscissa 2 és $y = mx - 5$

8. Tracem tots els segments que uneixen un vèrtex d'un cub amb tots els altres vèrtexs.
Mesurem tots i cadascun dels angles que formen parelles daquests segments. (entenem per parella la que formen dos segments diferents).
Quants valors diferents obtindrem entre les mesures daquests angles? Quina és la mesura, en radiants, del més petit dels angles que hem estudiat?

La resposta a la primera pregunta d'aquest problema passa com a valor B al problema 9.

Reptes finals

Per trobar la resposta numèrica del problema 9 cal conèixer el valor de dos nombres A i B que passen dels problemes 4 i 8.

9. Tenim un recipient format per un cilindre i un con, que tenen la mateixa base. L'altura total del recipient és de A unitats, on A és el valor que que passa del problema 4.
(vegeu la figura 1)

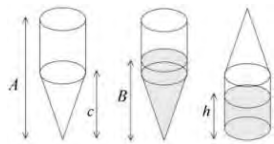


figura 1 figura 2 figura3

Hi aboquem la tercera part del líquid que hi cap, amb el con situat a la part de baix del recipient, que mantenim ben vertical, i el líquid arriba a una altura de B unitats, on B és el valor que passa del problema 8 (figura 2).
Si ara invertim el recipient i deixem el cilindre a la part de baix, també amb el recipient ben vertical, a quina altura arribarà el líquid, expressada en les mateixes unitats que les dues anteriors? (figura 3)

La resposta d'aquest problema passa a l'exercici següent com a valor S.

---

10. Per cada nombre real r escrivim $r = [r] + \{r\}$ on $[r]$ és la part entera de r (és a dir el nombre enter més gran que és més petit o igual que r) i $\{r\}$ n'és la part decimal. Resol el sistema següent per a nombres reals positius, x, y, z.

$$\begin{cases} x + |y| + \{z\} = 4{,}2 \\ y + |z| + \{x\} = 3{,}6 \\ z + |x| + \{y\} = S \end{cases}$$

on S és el nombre positiu que passa del problema anterior.

Reptes fora de concurs

11. Llancem una moneda "perfecta" enlaire sis vegades, successivament. Formem un nombre de sis xifres de la manera següent: si surt cara, posem una xifra 1, si surt creu, posem una xifra 2. Per exemple si surt cara, creu, creu, cara, creu, creu formem el número 122122.
a) Quina és la probabilitat que resulti un nombre múltiple de 9?
b) Quina és la probabilitat que resulti un nombre múltiple de 3?

---

12. Considereu la funció següent, definida en el conjunt dels nombres enters.

$$f(n) = \begin{cases} n - 3 & \text{si } \ n \geq 1000 \\ f(f(n+6)) & \text{si } \ n < 1000 \end{cases}$$

a) Per quants valors diferents de n es compleix $f(n) = n$?
b) Calculeu $f(2012) - f(-2012)$.

Problemes a l'esprint

Equips de batxillerat. Febrer/Març de 2012.

Participació i resultats

Aquesta vintena edició dels *Problemes a l'esprint* per a alumnes de Batxillerat es va desenvolupar en horari lliure per als centres. La participació va estar oberta els dies 29 de febrer (tot el dia) i 1 de març de 2012 (fins al migdia).
Van participar 30 equips, de centres de Catalunya i el País Valencià. En la inscripció es van fer constar més de 450 alumnes participants. 10 equips van enviar totes les respostes correctes. 5 equips també van enviar la resposta als reptes fora de concurs.

Centres més destacats

L'equip més destacat en aquesta convocatòria va ser el del centre

Aula Escola Europea, de Barcelona

que va enviar totes les respostes correctes, al primer intent, en un temps de 56 minuts.
El segon equip més ràpid va ser el del centre

Institut Jaume Vicens Vives, de Girona que feia la prova des d'Alemanya, en un intercanvi escolar, i que va enviar totes les respostes correctes, al primer intent, en un temps d'una hora i 10 minuts.

Altres equips que van encertar totes les respostes

IES Bellaguarda d'Altea (Marina Baixa)
Institut Andreu Nin d'El Vendrell (Baix Penedès)
Institut Santa Eugènia de Girona (Gironès)
Institut Samuel Gili i Gaya de Lleida (Segrià)
Institut Jaume I de Salou (Tarragonès)
Institut Montserrat Roig de Terrasa (Vallès Occidental)
Institut Narcís Oller de Valls (Alt Camp)
Institut Torre Roja de Viladecans (Baix Llobregat)

Problemes a l'esprint

Equips de batxillerat. Febrer/Març de 2012.

Les solucions

1. **3 arrels reals diferents**.

   L'equació $(((x-2012)^2-2)^2-4)^2 = 0$ és equivalent a $((x-2012)^2-2)^2-4 = 0$. Tenim doncs $((x-2012)^2-2)^2 = 4$ o, equivalentment, $(x-2012)^2-2 = \pm 2$. De $(x-2012)^2-2 = +2$ se'n dedueix $(x-2012)^2 = 4$, $x-2012 = \pm 2$ i obtenim dues arrels: $x = 2014$ i $x = 2010$.
   De $(x-2012)^2-2 = -2$ en resulta $x-2012 = 0$ i obtenim una altra arrel: $x = 2012$.

2. **Es pot deduir que els culpables són B i D**.

   Analitzem primer el fet que **A** diu que **C** és innocent, **C** diu que **E** és innocent i **E** diu que **A** és innocent. Si **A** diu la veritat, també la diuen **C** i **E** i tots tres són innocents. No pot ser que **A** sigui culpable perquè aleshores **E** mentiria i per tant seria culpable, i doncs **C** també mentiria i seria culpable. HI hauria 3 culpables, contra l'enunciat.
   Com que **B** diu que **D** és innocent i **D** diu que **F** és innocent, si **B** digués la veritat no hi hauria cap culpable. Així doncs **B** és culpable.
   Si **D** fos innocent, també ho seria **F** i només hi hauria un culpable. Per tant **D** també és culpable.

3. **10 anys**.

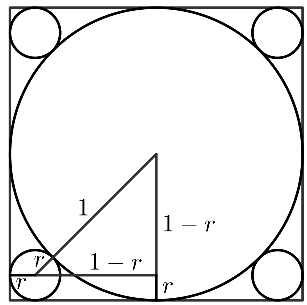
   A partir del nombre que passa del problema 5 les sumes de les edats per parelles són 23, 24, 26, 27, 29 i 30. És clar que les quatre edats han de ser diferents.
   Si indiquem $e < b < c < d$ les quatre edats, la suma més menuda és $e+b = 23$, la segona és forçosament $e+c = 24$ (perquè $e+c < e+d$ i també $e+c < b+c < b+d < c+d$), i semblantment podem dir que la penúltima és $b+d = 29$ i l'última $c+d = 30$.
   Si busquem per tempteig les solucions enteres del sistema format per aquestes quatre equacions amb la condició $e < b < c < d$ veurem que poden ser $\{10, 13, 14, 16\}$ o bé $\{11, 12, 13, 17\}$. La primera solució és compatible amb les dues sumes que no hem fet servir, $b+c = 27$ i $e+d = 26$. La segona solució no és compatible amb les altres dues sumes.

Alternativament podríem dir que les quatre equacions $e + b = 23$, $e + c = 24$, $b + d = 29$ i $c + d = 30$ es poden completar amb $e + d = 26, b + c = 27$ i el sistema resultant de sis equacions és compatible determinat i ens dóna la solució que ja coneixem o bé es poden completar amb $e + d = 27, b + c = 26$ que ens porta a un sistema sense solucions enteres.

---

4. El 9%.

Sense perdre generalitat podem suposar que el costat del quadrat és de 2 unitats. Aleshores el radi del cercle gran és 1 unitat. Indicarem amb r el radi de cadascun dels cercles menuts. Observeu el triangle rectangle que té d'hipotenusa el segment que va del centre del cercle gran al centre d'un dels cercles menuts (de longitud $1 + r$) i els catets són paral·lels als costats del quadrat (tindran de longitud $1 - r$).



Si hi apliquem el teorema de Pitàgores ens diu que $(1 + r)^2 = 2(1 - r)^2$ i d'aquí resulta $r = 3 \pm 2\sqrt{2}$.
La solució vàlida per a la nostra costrucció és $r = 3 - 2\sqrt{2}$.
La suma de les àrees dels quatre cercles petits és $A = 4\pi(3-2\sqrt{2})^2$ i com que l'àrea del quadrat amb la mesura que hem agafat és 4, la fracció del quadrat recoberta pels quatre cercles menuts és $p = \dfrac{4\pi(3 - 2\sqrt{2})^2}{4} = \pi(17 - 12\sqrt{2}) = 0,09248$, que correspon a un percentatge (arrodonit a un nombre enter) del 9%.

Problemes del colom de la pau

5. 23.

Si indiquem amb m el nombre d'estacions que ja hi havia i amb n el nombre d'estacions noves, la quantitat de nous bitllets que caldrà fer es podrà escriure com $2mn+n(n-1)$. Per unir cada una de les estacions noves amb cada una de les velles, anada i tornada, $2mn$ bitllets; per unir les estacions noves entre elles, en els dos sentits, $n(n - 1)$ bitllets. Ha de ser, doncs, $2mn + n(n - 1) = 200$. L'enunciat ens diu $n > 1$ i com que $n(n - 1) < 200$ veiem que ha de ser $1 < n < 15$.

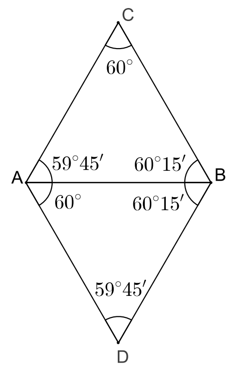
Com que $2mn + n(n-1) = n \cdot (2m + n - 1) = 200$ es dedueix que n ha de ser un divisor de 200.
Si ho provem per als divisors de 200 que ens interessen, a saber $\{2, 4, 5, 8, 10\}$, veurem que els únics per al quals el corresponent $m = \dfrac{100}{n} - \dfrac{n-1}{2}$ resulta ser un nombre enter són $n = 5$, que ens dóna $m = 18$, i $n = 8$ que dóna $m = 9$ i en aquest cas no es compleix la condició de l'enunciat que el nombre d'estacions noves sigui inferior a la tercera part de les que ja hi havia.
Per tant $n = 5$, $m = 18$ i el nombre total d'estacions, que és el que es demanava, és 23.

---

6. El segment AD.

Hi ha una propietat de la geometria del triangle que convé conèixer. En un triangle MNP de costats $m,\ n,\ p$ respectivament oposats als angles $M,\ N,\ P$ l'ordre de les longituds dels costats és el mateix que l'ordre de les mesures dels angles, és a dir $m \leq n \leq p \Longleftrightarrow M \leq N \leq P$.
Per als triangles acutangles aquesta propietat es dedueix immediatament del teorema dels sinus però se'n poden trobar altres demostracions generals que empren conceptes elementals, sense ús de la trigonometria.

Si calculem el tercer angle de cada triangle s'observa que el triangle ABC i el triangle DBA són semblants.
La propietat indicada ens diu que l'ordre creixent de les longituds dels costats en el $\triangle ABC$ és BC, AB, AC i en el $\triangle DBA$ és AB, DB, AD.
Com que AB és el costat més petit d'aquest triangle i en canvi és el segon de l'altre triangle vol dir que el triangle DBA és més gran que el triangle ABC.
El costat més gran de tots dos triangles serà, doncs, el costat és gran del triangle DBA, és a dir AD.



---

7. Punt $\left(1, \dfrac{-1}{2}\right)$.

A partir del nombre m que passa del problema 1 hem de considerar una paràbola $y = ax^2 + bx + c$ que té com a tangent en el punt d'asbcissa 0 la recta $y = -3x + 1$ i en el punt d'abscissa 2 la recta $y = 3x - 5$.
La simetria de la paràbola i el fet que les dues tangents donades tinguin pendents del mateix valor absolut però un d'ells positiu i l'altre negatiu, permeten deduir que el vèrtex tindrà abscissa $x = 1$ (valor mitjà entre $x = 0$ i $x = 2$).

Com que l'abscissa del vèrtex és $v = -\dfrac{b}{2a}$ això ens diu que $b = -2a$.
Com que el pendent de la tangent per $x = 0$ és 3 i $y' = 2ax + b$ resulta $b = -3$ i serà $a = \frac{3}{2}$.
Com que el punt d'abscissa 0 (que ho serà de la tangent i de la corba) és (0,1) resulta que $c = 1$.
Així doncs la paràbola que estem estudiant és $y = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$.
El punt corresponent a $x = 1$, que ja hem dit que és el vèrtex de la paràbola, és $(1,\ -1/2)$.

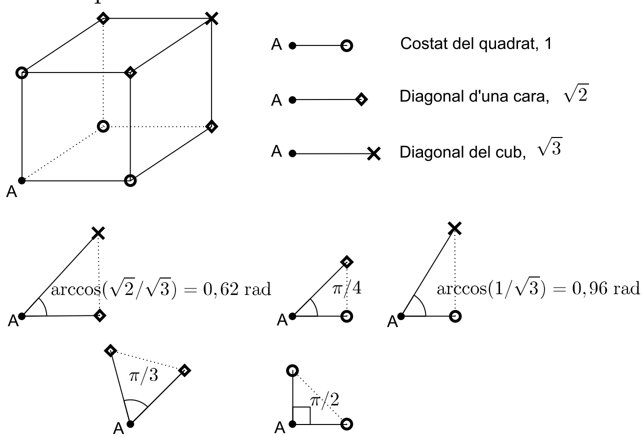
---

8. 5 angles diferents. El més petit pertany a l'interval $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{5}\right]$.

Podem considerar tres tipus de vèrtexs que determinaran els angles que se'ns pregunten:
$\circ$ Extrems de les arestes que concorren en el vèrtex triat.
$\diamondsuit$ Vèrtexs que no són els anteriors i pertanyen a una mateixa cara que el vèrtex triat.
$\times$ Vèrtex diagonalment oposat al vèrtex triat.

La figura següent mostra tots els angles que es poden considerar.

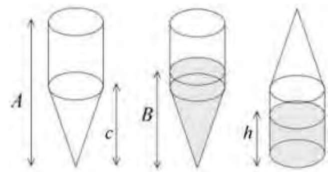
Observeu que, excepte en el cas que es determina un triangle equilàter, en tots els altres casos es pot considerar un triangle rectangle que un dels seus angles aguts és el que interessa.



Reptes finals

9. 2 unitats.

Donarem la solució en general, amb les lletres indicades a la figura: i posant r al radi de les bases del cilindre i del con.



Tenim que:

- El volum total és $V = \pi r^2(A - c) + \frac{1}{3}\pi r^2 c = \pi r^2(A - \frac{2}{3}c)$
- Semblantment veuríem que el volum ocupat inicialment pel líquid és $\pi r^2(B - \frac{2}{3}c)$. Com que ha de ser un terç del volum total tenim $\pi r^2(B - \frac{2}{3}c) = \frac{1}{3}\pi r^2(A - \frac{2}{3}c)$. Podem aillar c i obtenim $c = \dfrac{9B - 3A}{4}$.
- Si igualem el volum del líquid en les dues posicions tenim: $\pi r^2(B - \frac{2}{3}c) = \pi r^2 h$. Si simplifiquem πr^2 i substituim c pel valor obtingut anteriorment trobem $h = \dfrac{A - B}{2}$.

Com que les dades del problema són $A = 9, B = 5$ resulta $h = 2$.

---

10. $x = 1{,}9$, $y = 2{,}7$, $z = 0{,}3$.

Tot i que per al problema plantejat en l'activitat es podia avançar cap a la solució a partir del fet que el terme independent de la tercera equació era un nombre enter ($S = 2$) ara donem una solució general. Si en el sistema

$$\begin{cases} x + |y| + \{z\} = P \\ y + |z| + \{x\} = R \\ z + |x| + \{y\} = S \end{cases}$$

intentem eliminar x de la primera equació veiem que ho podem fer restant-li la segona i la tercera equacions.

Si fem aquesta operació, substituïm $y = |y| + \{y\}$ i $z = |z| + \{z\}$ i reordenem tenim

$$P - R - S = x - |x| - \{x\} + |y| - |y| - \{y\} - \{y\} + \{z\} - |z| - |z| - \{z\}$$

d'on es dedueix $P - R - S = -2(|z| + \{y\})$ i, per tant, $|z| + \{y\} = \dfrac{R + S - P}{2}$ i d'ací $|z| = |\dfrac{R + S - P}{2}|$ i $\{y\} = \left\{\dfrac{R + S - P}{2}\right\}$.

Semblantment amb $R - S - P$ podem deduir els valors de $|x|$ i de $\{z\}$ i amb $S - P - R$ els de $|y|$ i $\{x\}$ i acabem el problema.

Problemes fora de concurs

11. a) $\dfrac{5}{16}$**, b)** $\dfrac{11}{32}$.

Apartat a)
Perquè resulti un nombre múltiple de 9, la suma de les xifres que posem (que està sempre compresa entre 6 i 12) haurà de ser 9. Perquè passi això, necessàriament han de sortir tres 1 i tres 2. Hi ha $\binom{6}{3} = 20$ ordenacions de les xifres 1, 1, 1, 2, 2, 2. Com que cada una d'elles té una probabilitat $\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{1}{64}$ de sortir, la probabilitat total d'obtenir múltiple de 9 és $\dfrac{20}{64} = \dfrac{5}{16}$.

Apartat b)
Perquè resulti un nombre múltiple de 3, la suma de les xifres que posem haurà de ser 6 (sis 1), 9 o 12 (sis 2). Cadascuna de les possibilitats de treure múltiple de 3 que no sigui múltiple de 9 és $\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$ i, doncs, la probabilitat total d'obtenir múltiple de 3 és $\dfrac{5}{16} + 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{11}{32}$.

---

12. a) 3, b) 1012.
És clar que els valors de n que, per a la funció

$$f(n) = \begin{cases} n-3 & \text{si} \quad n \geq 1000 \\ f(f(n+6)) & \text{si} \quad n < 1000 \end{cases}$$

compleixin $f(n) = n$) seran valors més petits que 1000.
Si $n < 1000$ i $n+3 \geq 1000$ (és a dir, per als valors de n 999, 998 i 997) (també serà $n + 6 \geq 1000$) i aleshores $f(n) = f(f(n+6)) = f(n+3) = n$.

Aquests són els únics valors que compleixen $f(n) = n$.

Es pot veure que $f(996) = f(999) = 999$, $f(995) = f(998) = 998$, $f(994) = f(997) = 997$

En general s'observa una recurrència, $f(999 - 3k) = f(999) = 999$, $f(998 - 3k) = f(998) = 998$ i $f(997-3k) = f(997) = 997$ i, per tant, $f(-2012) = 997$.

Serà, doncs, $f(2012) - f(-2012) = 2009 - 997 = 1012$

Problemes a l’esprint

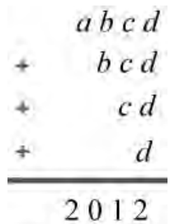
Equips d’alumnes de 1r i 2n d’ESO. Març de 2012.

Problemes de la branca d’olivera

1. En la suma representada a la figura, substituïu cada lletra per una xifra diferent de 0 perquè la suma sigui correcta. (Amb el benentès que lletres iguals corresponen a xifres iguals i lletres diferents corresponen a xifres diferents.)

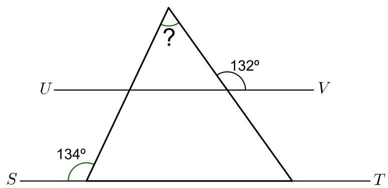
Quin és el número $a\,b\,c\,d$?

El valor de la xifra d de la solució passa al problema 7.



2. A la figura, la recta ST és paral·lela a UV.

Quina és la mesura de l’angle marcat amb un interrogant?



3. *Per resoldre aquest problema heu de començar calculant un nombre B. Si A és el nombre que passa del problema 5, serà $B = 2A + 2$.*

En una pàgina d’un llibre de mides 20 cm $\times B$ cm s’han deixat marges de 3 cm a dalt, a baix, a la dreta i a l’esquerra. Quin percentatge de la pàgina està ocupat pels marges?

4. Calculeu el nombre més petit de tres xifres amb la propietat que dividit per 5 dóna 4 de residu i dividit per 6 dóna 5 de residu.

La resposta d’aquest problema passa com a valor M al primer repte (problema 9).

Problemes del colom de la pau

5. L'Albert ha triat quatre nombres de la taula de la figura. En Bernat n'ha triat uns altres quatre.

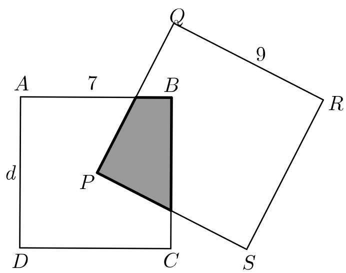
4	12	8
13	24	14
7	5	23

Si la suma dels nombres que ha triat l'Albert és justament el triple de la suma dels nombres que ha triat en Bernat, quin és el nombre de la taula que no ha triat cap dels dos?
La solució d'aquest problema s'ha de passar al problema 3 com a nombre A.

6. L'Anna, la Berta, la Carla i la Diana esmorzen a hores diferents a la mateixa taula. Com que no saben si les altres han esmorzat o no, cada una es menja exactament la quarta part de la mantega que queda quan ella comença a esmorzar. Quina part de la mantega que hi havia inicialment quedarà quan acabi d'esmorzar la quarta noia?

7. *Per resoldre aquest problema cal un nombre d que passa del problema 1.*

A la figura es veuen dos quadrats $ABCD$ i $PQRS$ que tenen com a longituds dels costats, respectivament, d unitats i 9 unitats.
El punt P és el centre del quadrat $ABCD$.
El costat PQ talla el costat AB en un punt que dista 7 unitats del punt A.
Quin és el perímetre del quadrilàter ombrejat?



8. Construïm successivament una llista de nombres enters positius amb les indicacions següents:

• Si el darrer nombre de la llista és més petit que 10, el multipliquem per 9 i el resultat l'afegim com un nou nombre de la llista.
• Altrament, és a dir si el darrer nombre és més gran que 9,...
 ◇ Si és un múltiple de 3, el dividim per 3 i el resultat l'afegim a la llista
 ◇ Si no és múltiple de 3, li restem 6 i el resultat l'afegim a la llista
Un exemple seria, a partir del 60, la llista següent 60, 20, 14, 8, 72, 24, 8, ...

Si comencem amb el 33, quin és el nombre que apareix en el lloc 2012è de la llista corresponent?

La resposta del problema passa com a valor N al problema 9.

Reptes finals

Per trobar la resposta numèrica del problema 9 cal conèixer el valor de dos nombres M i N que passen dels problemes 4 i 8.

9. L'Anna, que viu a la ciutat **A**, ha d'agafar un avió per anar a la ciutat **B**. Les dues ciutats estan molt allunyades, situades en fusos horaris diferents. L'horari dels vols, que duren el mateix el d'anada i el de tornada, és el següent:

Anada

Sortida de **A** a les M hores N minuts (hora de **A**).
Arribada a **B** a les 14 h 00 min (hora de **B**).

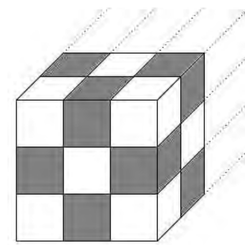
Tornada

Sortida de **B** a les 8 h 30 minuts (hora de **B**).
Arribada a **A** a les M h N min (hora de **A**).

Quina hora és a A quan a **B** són les 9 h 00 min del matí?

Si la resposta d'aquest problema és "les H hores m min", el valor H passa al problema següent.

10. Un ortoedre de dimensions $3 \times 3 \times H$ s'ha construït adossant cubs de $1 \times 1 \times 1$. Uns cubs són blancs i els altres grisos i s'han col·locat alternativament, començant en una cara 3×3 amb quatre cubs blancs a les cantonades d'aquesta cara.

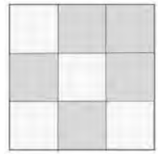


a) Quina part dels cubs que formen l'ortoedre són grisos?

b) Quina part de la superfície exterior de l'ortoedre és grisa?

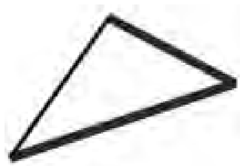
Reptes fora de concurs

11. L'Andreu ha vist una capsa quadrada plena exactament de capsetes quadrades. N'hi ha de grogues i de blaves. Les grogues tenen 5 caramels cada una i les blaves 4 caramels cada una.



Ha vist una capsa com la de la figura, que estava plena. Com que hi havia 4 capsetes grogues i 5 de blaves, tenia en total 40 caramels.
Per fer un regal, l'Andreu ha demanat que li confegeixin una capsa també quadrada i també amb capsetes dels dos tipus, però més grossa i que tingui exactament 164 caramels.
Quantes capsetes grogues li han de posar?

12. a) Dos llistonets de 6 i 10 cm de longitud es situen amb un extrem comú tal com es pot veure en la figura. Els altres extrems dels llistonets i l'extrem comú són els tres vèrtexs d'un triangle. Movent els llistonets (però sempre amb el mateix vèrtex comú) quina és l'àrea més gran que es pot obtenir per al triangle que es forma?



b) Quatre llistonets de 3, 5, 11 i 13 cm de longitud es fixen amb un extrem comú tal com es pot veure en la figura i els altres extrems dels llistonets són els vèrtexs d'un quadrilàter. Estudieu com s'han de posar els llistonets de manera que, movent-los, però mantenint sempre un extrem comú per a tots quatre, s'obtingui l'àrea més gran possible per a aquest quadrilàter. Quina és aquesta àrea màxima?

Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes de 1r i 2n d'ESO. Març de 2012.

Participació i resultats

En aquesta onzena edició dels *Problemes a l'esprint* per a alumnes de 1r i 2n d'ESO, celebrada el dia 21 de març de 2012 van participat 90 equips, de 73 centres d'Andorra, de Mallorca, de 6 comarques del País Valencià i de 20 comarques de Catalunya. 33 equips van enviar totes les respostes correctes. Alguns molt ràpid, d'altres després d'una bona estona de concurs. Enhorabona a tots!

Des de la comissió organitzadora es valora molt positivament el desenvolupament de l'activitat. Cal agrair la participació de tothom i felicitar els participants pel temps que hi van dedicar: al professorat que va organitzar i impulsar els equips i als més de 1700 alumnes que van estat una bona estona pensant com es farien els problemes i comentant resultats i procediments amb companys i companyes. I encara que no acabéssiu d'encertar totes les respostes us diem: «molt bé!» i per aquesta raó enguany s'ha fet una invitació a l'acte d'entrega de premis a un dels centres més destacats en cada convocatòria i, per valorar decididament la participació més que la competició, d'altres triats per sorteig entre els que van enviar totes les respostes correctes.

Centres més destacats

Els equips més destacats, que es declaren ex aequo com a guanyadors de l'activitat són:

IES Broch i Llop, de Vila-real (Plana Baixa)

que va enviar totes les respostes correctes al primer intent, i

IES Bellaguarda, d'Altea (Marina Baixa)

que va tenir encert ple al tercer intent. Computat el temps de concurs de tots dos centres queda en el minut 48è.

Es fa un reconeixement especial als equips que van enviar totes les respostes correctes en un temps de concurs inferior a una hora.

Institut Les Corts, de Barcelona (Barcelonès)
Institut Pere Fontdevila, de Gironella (Berguedà)
Institut Montsacopa, d'Olot (La Garrotxa)

Altres equips que van encertar totes les respostes

(s'indiquen per ordre alfabètic invers del nom de la població)

Institut de Sales de Viladecans (Baix Llobregat)
Escola Tecnos de Terrassa (Vallès Occidental)
Sagrat Cor de Terrassa de Terrassa (Vallès Occidental)
Institut de Sant Quirze del Vallès (Vallès Occidental)
Institut Jaume I de Salou (Tarragonès)
Institut Jonqueres de Sabadell (Vallès Occidental)
Col·legi Regina Carmeli, de Rubí (Vallès Occidental)
Escola Puigcerver de Reus (Baix Camp)
IES Port d'Alcúdia, de Port d'Alcúdia (Mallorca)
Institut Montserrat Miró i Vilà de Montcada i Reixac (Vallès Occidental)
Institut Pompeu Fabra de Martorell (Baix Llobregat)
Institut Pius Font i Quer de Manresa (Bages)
Institut Josep Lladonosa de Lleida (Segrià)
Institut Fontanelles de Les Borges del Camp (Baix Camp)
Institut Santa Eugènia de Girona (Gironès)
Institut El Cairat, d'Esparreguera (Baix LLobregat)
Institut de Corbera (Baix Llobregat)
IES Vicent Castell Domènech de Castelló de la Plana (La Plana Alta)
Institut El Sui de Cardedeu (Vallès Oriental)
Cardenal Vidal i Barraquer de Cambrils (Baix Camp)
Escola Joan Pelegrí, de Barcelona (Barcelonès)
Aula, Escola Europea, de Barcelona (Barcelonès)
Institut de Badia del Vallès (Vallès Occidental)
Institut Badalona VII de Badalona (Barcelonès)
Escola Garbí Pere Vergès de Badalona (Barcelonès)
Institut Voltrera d'Abrera (Baix Llobregat)

Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes de 1r i 2n d'ESO. Març de 2012.

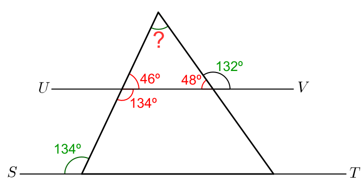
Les solucions

1. 1468.

La lletra a ha de ser un 1 perquè de la columna de les centenes n'hem de portar perquè aparegui el 0 del 2012 i, per tant en portarem 1.
La lletra b no pot ser un 5 perquè de la columna de els desenes n'hem de portar. Per tant la lletra b és un 4 i de la columna de les desenes en portem 2.
Com que de la columna de les unitats també n'hem de portar perquè aparegui el 2, la lletra c no pot ser un 7; ha de ser un 6 i de la columna de les unitats n'hem de portar 3.
És a dir que ha de ser $4d = 32$ i per tant $d = 8$ i el nombre demanat és $abcd = 1468$.

2. 86.

Podem determinar dos dels angles del triangle que queda per damunt de la recta UV.



• L'angle que veieu de 48° perquè és suplementari del de 132°.

• Podem veure un angle de 134°, igual que el donat, perquè són alterns externs entre les dues rectes paral·leles UV i ST. Per ser suplementari d'aquest, determinem un angle de 46°.

Com que els angles del triangle indicat sumen 180°, el que busquem serà $180° - 48° - 46° = 86°$

3. 44%.

Com que del problema 5 passa $A = 14$, serà $B = 2A + 2 = 30$ i les dimensions del full seran (en cm) 20×30 i la superfície total del paper serà de 600 cm^2.
Les dimensions de la zona de text seran 14×24; l'àrea de la zona de text serà de 336 cm^2 i l'àrea de la zona de marges serà $600 - 336 = 264$ cm^2.
El percentatge demanat és, doncs, $\dfrac{264}{600} \times 100 = 44\%$.

4. 119.

Direm N al nombre que busquem. Com que N dividit per 5 dóna 4 de residu, N ha de ser un múltiple de 5 menys 1. Com que N dividit per 6 dóna 5 de residu, N també ha de ser un múltiple de 6 menys 1. COm que el mínim comú múltiple de 5 i de 6 és 30, el nombre de tres xifres més petit que és múltiple alhora de 5 i de 6 és 120. D'aquí es dedueix que el nombre buscat és 119.

Problemes del colom de la pau

5. 14.

Si la suma dels nombres que ha triat l'Albert, diem-li a, és justament el triple de la suma dels nombres que ha triat en Bernat, diem-li b, serà $a = 3b$ i la suma dels vuit nombres triats serà $3b + b = 4b$, és a dir que ha de ser un múltiple de 4.

Com que la suma de tots els nombres de la taula és 110, que és un nombre parell però no múltiple de 4, el nombre que no hem de considerar per a obtenir com a suma dels altres vuit un múltiple de 4 haurà de ser també parell però no múltiple de 4. L'únic nombre de la taula amb aquesta propietat és el 14.

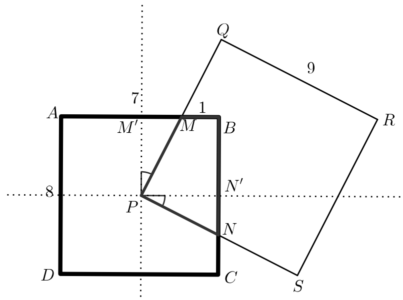
6. $\dfrac{81}{256}$.

Podem fer-ho anant "marxa enrere" pensant que cada xica deixa les $\frac{3}{4}$ parts de la mantega que hi havia.

Després de menjar les quatre, quedaran les $\frac{3}{4}$ parts del que havia deixat la tercera. Com que el que queda després d'esmorzar la tercera són les $\frac{3}{4}$ parts del que havia deixat la segona, al final quedaran $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ del que havia deixat la segona. Semblantment veiem que quedaran $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ parts del que havia deixat la primera i anàlogament $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{81}{256}$ parts de la quantitat de mantega que hi havia inicialment.

7. 18 unitats.

Si des del punt P, centre del quadrat de l'esquerra, tracem perpendiculars als costats del quadrat, es determinen, considerant també els costats de l'altre quadrat, dos triangles iguals, PMM' i PNN'. Son iguals perquè tenen un catet igual (igual a 4 unitats, mig costat del quadrat) i els angles marcats a la figura també són iguals perquè són dos angles aguts de costats perpendiculars.



Com que de l'enunciat es dedueix que $MB = 1$ i per tant $M'M = 4 - 1 = 3$ unitats, també serà $N'N = 3$, $NC = 1$ i $BN = 7$ unitats.

Si ara ens fixem en el triangle rectangle PMM' veiem que té un catet de 3 i l'altre de 4, i per tant la hipotenusa PM val $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ unitats. Per la igualtat que ja hem comentat també serà $PN = 5$. Podem establir, doncs, que el perímetre de $PMBN = 5 + 1 + 7 + 5 = 18$ unitats.

És interessant comentar que aquest càlcul no depèn per a res de la grandària del quadrat de la dreta de la figura i que tot i que el perímetre del quadrilàter $PMBN$ depèn de la posició dels dos quadrats, la seva àrea és sempre la mateixa encara que movem els dos quadrats, mantenint, això sí, un vèrtex del quadrat de la dreta en el centre del quadrat de l'esquerra.

8. 15.

Si seguim les instruccions per a la construcció de la llista, veurem que els primers termes són aquests:

$\{33, 11, 5, 45, 15, 5\}$

A partir d'aquí, com que cada nou terme només depèn de l'últim, s'aniran repetint els termes per grups de 3:

$\{33, 11, 5, 45, 15, 5, 45, 15, 5, 45, 15, 5, 45, 15, ...\}$

Per arribar al terme 2012è hem de comptar els dos primers i 2010 termes més; com que 2010 és múltiple de 3 el terme que busquem serà l'últim d'un dels grups de 3, és a dir que valdrà 15.

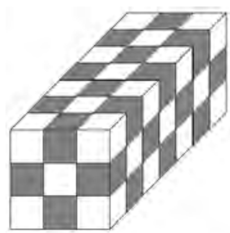
Reptes finals

9. Les 7 en punt.

Vistos els valors que passen de problemes anteriors, els horaris a tenir en compte són:
Anada: de les 9.15 (hora de A) a les 14.00 (hora de B)
Tornada: de les 8.30 (hora de B) a les 9.15 (hora de A)
Vistos els horaris, si imaginem que l'avió de tornada s'enlairés tot ajust arribar a B, a les 14.00 (hora de B) deduïm que arribaria a A a les 14.45 (hora de A). Per tant la durada real dels dos vols seguits hauria estat de 5 hores 30 minuts i, doncs, cada un duraria 2 hores 45 minuts.
Per tant quan l'avió arriba a B a les 14.00, hora de B, serien les 12.00, hora de A. Ja tenim doncs la diferència horària, que ens permet respondre que quan en l'hora B són les 9.00 hores, al mateix moment en l'hora de A són les 7.00 hores.

10. a) 31/63; b) 8/17.

A partir del valor que passa del problema anterior, les dimensions de l'ortoedre són $3 \times 3 \times 7$.



Per resoldre l'apartat a) hem de tenir en compte que en total hi ha $3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$ cubs i que el nombre de cubs grisos, mirant-ho per "llesques" de 3×3 començant per la que té les quatre cantonades blanques és $4+5+4+5+4+5+4 = 31$. Per tant la fracció del nombre de cubs grisos respecte del total de cubs és $\frac{31}{63}$.
Pel que fa a l'apartat b) veiem que la superfície total (prenent com a unitat la cara dels cubs petits) és $2 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 7 = 102$ i el nombre de cares exteriors grises dels cubs que formen l'ortoedre (mirant primer les dues cares de 3×3 i després les quatre cares de 3×7) és $2 \cdot 4 + 4 \cdot 10 = 48$. La fracció demanada, de superfície grisa respecte el total de la superfície és $\frac{48}{102} = \frac{8}{17}$.

Problemes fora de concurs

11. 20.

Com que $\dfrac{164}{4} = 41$ i $\dfrac{164}{5} = 32,8$ això ens diu que el nombre de capsetes ha d'estar entre aquests dos valors, però com que a més sabem que ha de ser un quadrat perfecte només pot ser 36.
Si pensem que a cadascuna de les 36 capsetes hi hem posat 4 caramels, com que $36 \cdot 4 = 144$, veiem que exactament en 20 capses hi hem d'afegir un caramel. Seran doncs 16 capses de 4 caramels i 20 capses de 5 caramels les que hi hauran a la capsa-regal de l'enunciat.

Com a cosa curiosa expliquem una solució que ha comentat un alumne. Agafa la capsa quadrada que es donava com a exemple, que tenia 40 caramels; ajunta quatre capses d'aquestes formant un quadrat i veu que així té 160 caramels amb 16 capsetes de 5 i 20 capsetes de 4. Li falten 4 caramels. Afegeix un caramel a quatre capsetes de 4 (i aleshores seran 20 de 5 i 16 de 4) i ja té el problema resolt.

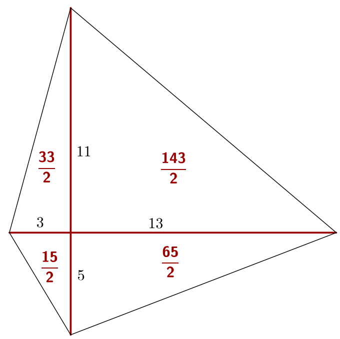
---

12. a) 30; b) 128.

Si un triangle té dos costats "mòbils" de longituds a i b, la màxima àrea que pot tenir s'aconsegueix quan aquests dos costats siguin els catets d'un triangle rectangle, i l'àrea és, doncs, $A = \dfrac{a \cdot b}{2}$. Si el triangle no és rectangle l'àrea seria $A = \dfrac{a \cdot h}{2}$ on h és l'altura sobre el costat a. Si el costat b no és perpendicular a a, sinó que l'hi és oblic, aleshores és clar que $h < b$.

a) Per la propietat que acabem de comentar la resposta és $A = \dfrac{6 \cdot 10}{2} = 30$.

b) La màxima àrea del quadrilàter s'obtindrà quan disposem els llistonets formant quatre triangles rectangles. Per altra banda, per obtenir l'àrea màxima, interessa que un d'aquests triangles tingui per costats 11 i 13. De les dues possibilitats que es presenten per situar el 3 i el 5 es pot veure que la que dóna àrea màxima és



i l'àrea total és $A = \dfrac{13 \cdot 11}{2} + \dfrac{11 \cdot 3}{2} + \dfrac{3 \cdot 5}{2} + \dfrac{5 \cdot 13}{2} = 128.$

Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes del cicle superior de Primària. Març de 2012.

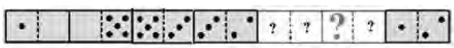
Problemes de la branca d'olivera

1. En un full quadriculat l'Albert ha dibuixat un rectangle de mides 4×7 que té els vèrtexs en punts de la quadrícula. La Berta ha dibuixat la diagonal d'aquest rectangle i ha vist que travessa 10 quadradets de la quadrícula.

Després l'Albert ha dibuixat un rectangle de mides 11×17 (també amb els vèrtexs en punts de la quadrícula) i la Berta ha dibuixat la diagonal d'aquest rectangle. La Berta s'hi ha fixat bé i ha vist que, com succeïa a la figura de l'exemple, tampoc aquesta diagonal no passa per cap punt de la quadrícula. Quants quadradets de la quadrícula travessa la diagonal del rectangle de mides 11×17?

El número solució d'aquest problema passa al problema 7.

2. La Maria havia fet una filera de set fitxes de dòmino seguint les instruccions del joc (s'han de tocar caselles amb el mateix número de punts). Sap que entre totes les fitxes que havia posat sumaven 33 punts. Però ha vingut el seu germà petit, en Cesc, i ha tret dues fitxes de la filera.



Quants punts hi havia a la casella marcada amb l'interrogant gros?

3. *Per resoldre aquest problema cal conèixer un nombre de dues xifres que us han de passar del problema 5 i que està representat així:* □■.

Escrivim el nombre següent

59□■416

Volem esborrar quatre xifres d'aquest nombre a fi i efecte que el nombre format per les tres xifres que quedin, sense alterar-ne l'ordre, sigui el més petit possible. Quin nombre de tres xifres ens quedarà després d'esborrar-les?

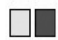
4. La Maria i en Joan fan la mateixa col·lecció de cromos, que consta de 140 cromos.
La Maria en té 106 diferents i en Joan 80 també diferents i comproven que si ajunten tots els seus cromos acaben la col·lecció.
Quants cromos té la Maria que no té en Joan?

La resposta d'aquest problema passa al primer repte (problema 9) amb el nom de "Llarg".

Problemes del colom de la pau

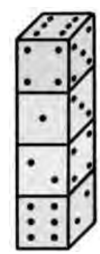
5. Quatre àvies, l'Anna, la Dolors, la Maria i la Pilar, que es troben cada dia, avui comparen les seves edats.
La Pilar diu : «D'aquí 5 anys, si encara visc, tindré 84 anys ».
La Pilar diu després a la Dolors : «Tinc 7 anys menys que tu».
L'Anna i la Pilar es miren i una d'elles diu : «Entre nosaltres dues hi ha 4 anys de diferència ».
L'Anna diu a la Maria, que és la més jove : «Tinc 12 anys més que tu ».
La Maria diu a la més gran : «Tens 15 anys més que jo».

Quants anys té lAnna?

La solució d'aquest problema passa al problema 3, on es representa 

6. Els daus que fem servir per jugar al parxís tenen la propietat que la suma dels punts de cada parell de cares oposades és 7. Tots els daus compleixen aquesta propietat però no tots són iguals pel que fa a la disposició de les cares.

La Nahia ha agafat quatre daus idèntics i els ha posat formant una torre, com es veu a la figura. Quants punts hi ha a la cara de sota del dau de baix de tot, la que toca a terra?



7. *Per resoldre aquest problema cal un nombre que passa del problema 1.*

La Pilar i en Pau han anat a buscar rovellons. En total n'han collit tants com el nombre que passa del problema 1. S'adonen que si en Pau donés un rovelló a la Pilar, aleshores la Pilar en tindria exactament el doble que en Pau. Quants bolets ha collit en Pau?

8. L'Antoni ha d'aprendre de memòria les taules de multiplicar, de la del 2 fins a la del 9 (ja sap la taula de l'1 i la del 10).

La mestra, per animar-lo, li ha explicat que no són tantes les multiplicacions que ha de saber, ja que si canviem l'ordre dels dos nombres que multipliquem s'obté el mateix resultat (per exemple $4 \times 9 = 9 \times 4$; i amb això, com que ja sap, per exemple, els resultats de 1×5 i de 10×3 també sabrà els de 5×1 i 3×10).

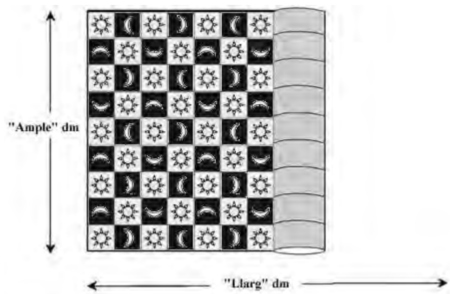
Quantes multiplicacions diferents, noves, ha de recordar l'Antoni per saber totes les taules del 2 al 9?

La resposta d'aquest problema passa com a número "Ample" al problema 9.

Reptes finals

Per trobar la resposta numèrica del problema 9 cal conèixer el valor de dos nombres: "Llarg" que passa del problema 4 i "Ample", del problema 8.

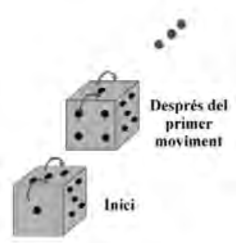
9. L'Arnau ha comprat una catifa de "Llarg" dm de llarg i de "Ample" dm dample. La catifa està formada, tal com es pot veure a la figura, de petits quadrats que contenen el dibuix d'un sol o d'una lluna. Podeu veure que a l'ample hi ha 9 d'aquests quadrats. Quan la catifa estigui totalment desplegada, quantes llunes hi haurà?



La resposta d'aquest problema passa al següent com a nombre "Quants".

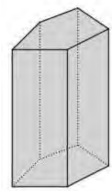
10. *Necessiteu conèixer un nombre "Quants" que passa del repte anterior.*

Un dau com els que es fan servir habitualment per jugar (les cares oposades sumen 7 punts) està situat inicialment a sobre d'una taula tal com indica la figura.
El movem tal com indiquen les fletxes i així, després del primer moviment la cara superior serà l'1.
Si des de la posició inicial fem "Quants" moviments com l'anterior, quants punts marcarà la cara superior després dels "Quants" moviments?



Reptes fora de concurs

11. A la figura teniu un prisma pentagonal. Podeu veure que té 7 cares, 10 vèrtexs i 15 arestes. ¿Quantes cares té un altre prisma que a les bases té polígons iguals (amb més costats que el pentàgon) i que sabem que té 36 arestes?



12. A la classe de la Rosa, entre tots els alumnes han fet una maqueta d'un poblet. Han construït les cases amb cubs de fusta tots iguals i les han enganxat sobre una base quadriculada. Per fer una casa de més d'un pis han enganxat els cubs (tants com pisos) els uns sobre els altres.

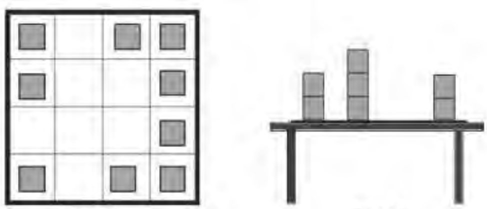


Figura 1 Figura 2

La figura 1 ens mostra la maqueta vista des de dalt i la 2 la maqueta tal com la veu la Rosa que està asseguda a la seva taula.

Quin és el nombre màxim de cubs que es poden haver utilitzat per a fer la maqueta?

Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes del cicle superior de Primària. Març de 2012.

Participació i resultats

En aquesta onzena edició dels *Problemes a l'esprint* dedicada a alumnes de primària hi han participat 22 equips de centres de Mallorca, del País Valencià i de Catalunya, de 13 comarques diferents, que han fet constar globalment 572 alumnes participants.
La comissió organitzadora vol destacar el gran encert de tots els equips participants, uns més ràpidament i uns altres amb més perseverança, uns amb alguns intents fallats però finalment amb encert i uns altres sense cap errada al primer intent, cosa que cal destacar molt especialment.. Enhorabona!!!
Per valorar decididament la participació més que la competició es convidarà a l'acte d'entrega de premis alguns equips seleccionats aleatòriament entre tots els participants.

Centres més destacats

L'equip que va enviar més ràpidament totes les respostes correctes és el del
Col·legi Joan Pelegrí, de Barcelona que ho va fer amb un temps de concurs (comptant els intents fallats) de, aproximadament, 35 minuts.

La comisisó vol fer un reconeixement especial als equips que van enviar totes les respostes correctes al primer intent. Per ordre de temps de concurs:

Col·legi Regina Carmeli, de Rubí (Vallès Occidental)
Aula, Escola Europea, de Barcelona (Barcelonès)
CEIP Marian Aguiló, de Palma de Mallorca
Escola Andersen, de Vic (Osona)

Altres equips participants. Tots van encertar totes les respostes

(s'indiquen per ordre alfabètic del nom de la població)

Escola Gayarre (Barcelona)
Escola Joan Roca-Meridiana, Barcelona
Escola Sadako, Barcelona
La Vall, Bellaterra (Vallès Occidental)
Col·legi Mare de Déu de Montserrat, Les Borges Blanques, (Les Garrigues)
Escola Misericòrdia, Canet de Mar (El Maresme)
Escola Turó del Drac, Canet de Mar (El Maresme)
Escola Municipal La Sínia, Cerdanyola (Vallès Occidental)
Escola Montserrat, Esparreguera (Baix LLobregat)
Santo Angel, Gavà (Baix Llobregat)
Nuestra Señora del Carmen, Gandia (La Safor)
Bell-lloc del Pla, Girona (Gironès)
Col·legi Santa Ana, Lleida (Segrià)
Escola Jaume I, Llívia (La Cerdanya)
Escoles Montcau-La Mola, Matadepera (Vallès Occidental)
Col·legi Sant Pau Apòstol, de Tarragona
Escola Dr. Fortià Solà, Torelló (Osona)

Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes de 1r i 2n d'ESO. Març de 2012. Les solucions

Problemes de la branca d'olivera

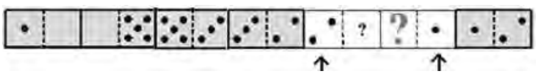
1. **Resposta: 27**.

   Si es fa un dibuix podria semblar que la diagonal passa per algun vèrtex de la quadrícula, però l'enunciat ja indicava que no era així. Aleshores si es fa un dibuix gran, acurat, es veurà que en el cas d'un rectangle de 11×17 la diagonal travessa 27 quadradets de la quadrícula.

   Afegirem un raonament d'aquest fet. Si la diagonal no pasa per cap punt de la quadrícula talla totes les rectes que formen la quadrícula de l'interior del rectangle que són 10 horitzontals i 16 verticals (o a l'inrevés segons com considerem el rectangle). A part del primer quadradet, aquell on comença la diagonal, cada recta que es talla pertany a un quadradet nou que es travessa. En total, doncs, travessa $1 + 10 + 16 = 27$ quadradets.

2. **Resposta: 4**.

   Per les regles del joc del dòmino podem omplir les caselles assenyalades amb les fletxes:

   Fina ara tenim posats 25 punts; en falten $33 - 25 = 8$, que s'han de repartir entre dues caselles amb el mateix nombre de punts. A cadascuna d'aquestes caselles li corresponen $8 \div 2 = 4$ punts.

3. **Resposta: 316**.

   Atenent al fet que del problema 5 passa un 83, hem de llevar quatre xifres del nombre 5983416 a fi i efecte que sense alterar l'ordre de les que quedin resulti el nombre més menut possible.

   Podeu veure que l'objectiu s'aconsegueix llevant les xifres 5, 9, 8 i 4 i ens queda el número 316.

4. Resposta: 60.

Si la Maria té 106 cromos diferents i en Joan 80 diferents, en total tenen $106 + 80 = 186$ cromos. Com que la col·lecció té 140 cromos, això vol dir que entre tots dos en tindran $186 - 140 = 46$ repetits. Aleshores el nombre de cromos que té la Maria i no té en Joan serà $106 - 46 = 60$.

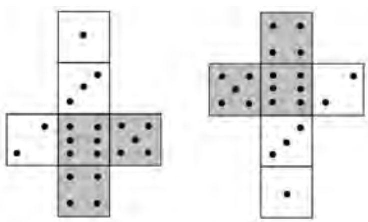
Problemes del colom de la pau

5. Resposta: 83.

La Pilar té $84 - 5 = 79$ anys.
La Dolors té $79 + 7 = 86$ anys.
L'Anna pot tenir, segons el que es diu a la tercera frase de l'enunciat $79+4 = 83$ anys o $79 - 4 = 75$ anys.
Si agafem la primera possibilitat deduirem que la Maria tindria $83 - 12 = 71$ anys; aleshores la més gran seria la Dolors i seria veritat que té 15 anys més que la Maria (perquè $86 - 71 = 15$).
En canvi si pensem que l'Anna té 75 anys, la Maria en tindria 63 i no seria veritat que la més jove té 15 anys menys que la més gran.

6. Resposta: 3.

Mireu quina seria, en la pantilla del desplegament del cub, la posició de les sis cares.



A la figura de l'esquerra hem situat a les caselles ombrejades el 4, 5 i 6 tal com es veuen al dau del cim de la torre. Tot seguit hem col·locat el 3, el 2 i l'1 en les cares que quan es munta el cub queden oposades respectivament a 4, 5 i 6.
A la figura de la dreta hem girat la pantilla i l'hem posada de manera que us ajudarà a veure que quan col·loquem el 6 i el 2 com apareixen al dau de baix de la torre, a la cara de sota hi quedarà el 3.

7. Resposta: 10.

Quan en Pau ja hagi donat un rovelló a la Pilar aleshores de cada tres bolets que han collit dos els tindrà la Pilar i un en Pau. És a dir que la tercera part dels bolets collits els té en Pau ($27 \div 3 = 9$, perquè el nombre que passa del problema 1 és un 27) i dues terceres parts (18 bolets) els té la Pilar. Com que això succeeix després que en Pau li hagi passat un bolet a la Pilar, vol dir que inicialment en Pau tenia 10 bolets i la Pilar 17.

8. Resposta: 36.

L'Antoni ha d'aprendre els resultats de les multiplicacions següents:
- De cada nombre del 2 al 9 per ell mateix. Això són 8 multiplicacions.
- De cada nombre del 2 al 9 per un de diferent. Això serien $8 \times 7 = 56$ multiplicacions. Però amb la indicació que li ha fet la mestra, que per exemple $4 \times 9 = 9 \times 4$, l'Antoni sap que n'haurà d'aprendre la meitat, $56 \div 2 = 28$.

En total, doncs, $8 + 28 = 36$ multiplicacions.

Reptes finals

9. Resposta: 67.

Vistos els valors que passen de problemes anteriors, les mides de la catifa són 36 dm $\times$ 60 dm.
A l'ample hi ha 9 quadradets, per tant cada quadradet fa $\dfrac{36}{9} = 4$ dm de costat.
Per tant al llarg hi haurà $\dfrac{60}{4} = 15$ fileres de quadradets. En aquestes fileres observem que hi ha, successivament 4, 5, 4, 5 llunes... i acabem amb 5 i 4 llunes.
És a dir, 7 vegades $4+5$ més el 4 del final, en total $7 \times (4+5)+4 = 67$ llunes.

10. Resposta: 6.

Podem veure que la successió de punts que marca la cara de dalt després de cada moviment és aquesta:

$$1, 4, 6, 3, 1, 4, 6, 3, ...$$

Com que van de 4 en 4 i hem de fer 67 moviments, dividim 67 per 4 i trobem que dóna 16 de quocient i 3 de residu. Per tant haurem trobat 16 vegades el grup 1, 4, 6, 3 i faltaran tres moviments. Després del tercer trobarem un 6.

Problemes fora de concurs

11. Resposta: 14.

Les arestes d'un prisma són: dues vegades el nombre de costats de les bases més una altra vegada el mateix nombre per les arestes laterals, les que uneixen els vèrtexs d'una base amb els correpsonents vèrtexs de l'altra. En total, doncs, tres vegades el nombre de costats del polígon de la base.
En aquest cas, doncs les bases tenen $36 \div 3 = 12$ costats.
Hi ha tantes cares laterals com el nombre de costats de les bases més les dues bases: $12 + 2 = 14$ cares.

---

12. Resposta: 20.

A la figura 1 hem assenyalat quina és la posició des de la qual la Rosa ha de veure la maqueta. Adoneu-vos que a la segona filera començant per la dreta no hi ha d'haver cap cub i això només passa des del lloc indicat.

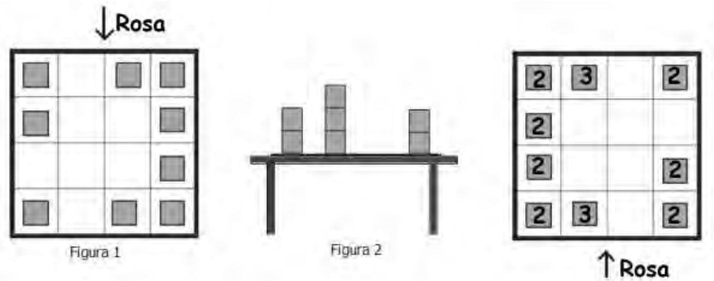


Figura 1 Figura 2

A la figura de la dreta hem posat el màxim nombre de cubs que hi pot haver en cada posició. A la primera filera de la seva esquerra la Rosa en veu 2; com a màxim n'hi pot haver 2 en cada una de les quatre posicions que tenen cubs en aquesta filera. A la segona de la seva esquerra en veu 3 i hi ha dues posicions amb cubs. A la quarta en veu 2. En total, doncs, com a màxim 20 cubs.

XVII Cangur SCM

Presentació i dades

Un any més el vaixell de la prova Cangur ha arribat a bon port després de la seva singladura. Això ha estat possible gràcies a l'impuls de la Societat Catalana de Matemàtiques, a la tasca desinteressada, i alhora molt intensa, dels membres de les comissions que fan tota la gestió de la prova i a la col·laboració del professorat, dels centres educatius i d'altres institucions.

És així que la prova Cangur de la SCM va creixent, any rere any. Creix l'àmbit geogràfic (que enguany ha abastat Andorra, totes les Illes Balears i pràcticament totes les comarques de Catalunya i de la Comunitat Valenciana, en aquest cas fins i tot amb centres de zones de parla castellana) i creix de manera molt significativa el nombre total de participants, al·lots i al·lotes, xiques i xics, noies i nois, que durant una estona busquen el *gust per les matemàtiques* mitjançant la resolució de problemes, amb reptes ben diferents dels que habitualment se'ls proposen a les classes d'ESO o de Batxillerat.

Per tot això ha semblat interessant incloure en aquesta publicació, a més d'enunciats, solucions i llista d'alumnes que han destacat en el Cangur, un petit recull de dades estadístiques de participació (amb un mapa il·lustratiu) i sengles escrits de cadascuna de les tres comissions territorials.

L'equip de redacció

Dades d'alumnes participants

	Balears	Catalunya	València	Total
Nivell 1	1.334	7.256	1.236	9.826
Nivell 2	1.257	6.164	1.342	8.763
Nivell 3	908	4.016	909	5.833
Nivell 4	338	2.580	375	3.293
Total	3.837	20.016	3.862	27.715

Dades de centres i municipis

	Balears	Catalunya	València	Total
Centres	86	562	195	843
Municipis	28	202	122	352

El Cangur a Catalunya, les Balears i el País Valencià

– Ja hem superat els vint mil!
Ara fa disset anys, a finals del curs 94-95, des de la SCM vam enviar als centres de secundària de Catalunya una mostra d'enunciats de problemes d'un concurs de matemàtiques que es feia en diversos països i que en deien «el Cangur» perquè la idea sorgia d'un concurs australià.
Vam rebre opinions ben favorables; el professorat deia que ajudava a veure les matemàtiques d'una altra manera i que animava els alumnes a trobar *el gust* en la resolució de problemes. Dèiem al número 3 de **SCM/Notícies** que mai no es podria assolir aquest objectiu sense una col·laboració decidida del professorat. Hi vam confiar i, en part com una aventura, vam convocar la primera **prova Cangur de la SCM** per al dia 22 març de 1996. Vam tenir 1313 participants i l'èxit va animar a continuar. Poc podíem imaginar aleshores que la participació a Catalunya s'hauria multiplicat per més de 15 en arribar al dissetè Cangur!

– Quines són les claus de l'èxit?
La representant d'Alemanya deia durant la trobada internacional del Cangur que la SCM va organitzar l'any 2006 a l'IEC: «*El Cangur agrada al professorat perquè troba problemes que fan pensar. El Cangur agrada als alumnes perquè veuen enunciats amb noves idees i perquè els permet durant un matí fer activitats diferents de les classes.*» Quanta raó! Creiem que en el cas del Cangur de la SCM va ser un encert, des del primer any, agrupar els alumnes de diferents centres en seus. Ho hem aconseguit perquè ha estat ben certa la col·laboració del professorat. Posteriorment ha estat imprescindible l'ajut logístic d'Universitats, d'Ajuntaments i d'altres institucions que ofereixen aules o locals i en molts casos completen el Cangur amb altres ofertes i així, entre tots, anem anar avançant cap a una *Festa de les matemàtiques*.

– El Cangur, pot anar creixent més i més?
Si des del 1996 el Cangur hagués augmentat la participació, de manera constant, cada any «només» en un 10% enguany hi hauria hagut poc més de sis mil participants. Si hagués estat en un 15% hauríem superat de poc els dotze mil. I, en canvi, hem arribat a més de vint mil, cosa que equival a un augment anual constant de més del 18%.
Com que les opinions que rebem són globalment molt positives i com que per raons diverses, conceptuals o logístiques, hi ha molts centres que no participen (el nombre de centres participants ha anat augmentant cada any, però «només» s'ha multiplicat per 5) es previsible que el nombre d'alumnes participants segueixi creixent. Podria passar que el Cangur «morís d'èxit» i el vaixell s'enfonsés?

Les persones que formem part de la comissió Cangur de la SCM us podem assegurar que treballarem perquè això no passi, i que si cal buscarem noves idees per a desenvolupar ben eficaçment la prova. Tal com ja va succeïr quan va nèixer el Cangur, estem oberts a rebre idees i suggeriments de part de tot el professorat per ajudar a que el vaixell del Cangur pugui arribar a port cada any més carregat! Gràcies a tothom que hi ajuda!

Antoni Gomà
Comissió Cangur de la SCM

Les **Proves Cangur** a les Illes Balears, en la seva tretzena edició, han estat organitzades per la Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX, amb la col·laboració de moltes entitats públiques i el patrocini d'empreses privades. La Universitat de les Illes Balears (UIB) és un dels principals suports de les proves (de fet, en fou l'organitzadora en les 8 primeres edicions). Així mateix, l'altre col·laborador institucional és la Conselleria d'Educació, Cultura i Universitats del Govern de les Illes Balears.

Durant les set primeres edicions, les Proves Cangur a les Illes Balears es realitzaven als centres, on cada alumne feia la seva prova. Després d'una experiència pilot a l'any 2007, l'any 2008 es varen proposar tres grans seus a Mallorca en alguns poliesportius, a on els centres participants s'havien de desplaçar per realitzar la prova. L'experiència fou tan positiva que des de llavors s'ha mantingut aquesta disposició, i des de l'any 2009 Menorca s'afegí a aquesta proposta. La trobada massiva permet veure d'una manera més directa l'alta participació que tenen les **Proves Cangur**, i això les converteix en un punt de trobada matemàtic, que l'organització aprofita per proposar alguna activitat matemàtica posterior.

La inscripció d'alumnes a les Proves Cangur 2012 a les Illes Balears va ser de 4187 alumnes de 86 centres d'arreu de les Illes Balears, i es va distribuir en les seus següents:

- a Palma, el velòdrom Palma Arena, amb un total de 2328 alumnes
- a Manacor, el Poliesportiu Miquel Àngel Nadal, amb 542 alumnes
- a Inca, el Palau Municipal d'Esports, amb 491 inscrits
- a Maó, el Poliesportiu Municipal, amb 378 alumnes
- a Ciutadella de Menorca, la Sala Multifuncional, amb 273 inscrits
- a Eivissa, el nombre d'inscrits ha estat 147 i a Formentera, 28. En aquestes dues illes s'ha mantingut la realització de les proves als centres.

En les cinc seus esmentades, després de la realització de les Proves, es va continuar amb una gimcana matemàtica de 40 minuts. S'havien de resoldre una sèrie de problemes encadenats per grups, i les puntuacions obtingudes per cada grup s'anaven calculant i ponderant en funció dels alumnes de cada nivell que tenia cada centre. Al final, es donà el reconeixement als centres que havien tengut una participació destacada.

La jornada del Cangur s'acabà d'arrodonir amb dues conferències sobre matemàtiques, que estaven obertes a tots els participants i al públic en general. A Palma comptàrem amb l'escriptor Màrius Serra, que relacionà les matemàtiques amb la literatura amb «El plaer del joc verbal», i a Manacor es va poder gaudir d'una conferència sobre «Realitat i ficció en el tractament d'imatges: de les Rondalles a CSI», a càrrec del professor José Luis Lisani, del Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica de la UIB.

Els alumnes que obtenen una de les deu millors puntuacions de cada nivell són premiats amb material informàtic, llibres sobre matemàtiques, o altre material escolar. A més, la UIB atorga als tres primers classificats del nivell 4 la matrícula gratuïta del primer curs a la UIB.

La comissió organitzadora està integrada per una dotzena de persones de l'SBM-XEIX. Així mateix, l'alumnat dels estudis de Matemàtiques de la UIB ajuda amb el suport logístic en la preparació i durant el dia de la prova.

La valoració que any rere any fan els centres participants sobre l'organització de les **Proves Cangur** és altament positiva, cosa que motiva per continuar en els propers anys proposant una jornada completa de matemàtiques.

Daniel Ruiz
Comissió Cangur a les Illes Balears

Des del País Valencià volem felicitar tota la gent que col·labora i participa en el desenvolupament de la **Prova Cangur** arreu dels Països Catalans. En aquest breu escrit explicarem el funcionament de la prova al País Valencià.

La Prova Cangur se celebra al País Valencià des de l'any 2000. Aquesta va començar a realitzar-se a instituts de les comarques del nord del país, coordinades per la Universitat Jaume I (UJI). L'any següent s'afegí el Campus de Vera de la Universitat Politècnica de València (UPV) a través del Departament de Matemàtica Aplicada (DMA). A continuació la Facultat de Matemàtiques (situada al Campus de Burjassot) de la Universitat de València (UV). Posteriorment el Campus d'Alcoi de la UPV i tot seguit el Campus de Gandia de la UPV. Finalment s'afegí la Universitat d'Alacant (UA). També hi col·labora la Societat d'Educació Matemàtica SEMCV-Al-Khwarizmi. Llevat de les comarques del Nord i de dos instituts adscrits al Campus de Vera, a la resta del país, la prova es realitza als diferents campus universitaris.

En un primer moment, l'organització de la Prova Cangur a les nostres comarques la realitzàvem des de Catalunya. Tanmateix, atès el creixement participatiu, des de fa tres anys hem creat una *Comissió Cangur al País Valencià* encarregada de l'organització de la prova al nostre territori. Aquesta Comissió es coordina amb la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM) que és l'entitat titular del Cangur en llengua catalana i per això l'encarregada de dur endavant la prova als Països Catalans. L'esmentada Comissió la formem representants de la UJI, dels tres Campus de la UPV, de la UV, de la UA i de la SEMCV-Al-Khwarizmi. La nostra Comissió participa en l'elaboració de la prova a nivell de Països Catalans i representants nostres participen de ple dret a les reunions de la Comissió Cangur en llengua catalana.

Com a la resta del territori, la prova està sent un èxit i és molt ben acollida. És per això que el nombre d'instituts i alumnat s'ha anat incrementant any rere any. En l'edició actual han participat vora 4200 alumnes i vora 200 instituts. La previsió per l'any vinent és que el nombre siga encara major.

Abans d'acabar aquestes ratlles m'agradaria destacar dos aspectes que considere que fan important la prova. El primer és el d'acostar la Matemàtica a l'alumnat de secundària des d'una perspectiva alternativa i complementària a l'acadèmica. Amb un caire participatiu, lúdic i seriós alhora, pretenem incentivar el coneixement i l'estima per la Matemàtica. Intentem que l'alumnat comprenga la seua aplicabilitat general a qualsevol aspecte humà.

El segon aspecte que m'agradaria destacar és el fet que la prova la realitzem en valencià, la nostra manera d'anomenar el català. Malauradament, la situació de la nostra llengua no és tan bona com desitjaríem i, encara més, després dels continuats atacs que rep des de moltes instàncies. Al País Valencià, potser encara siga pitjor aquesta situació. És per això que el fet de fer-la en la nostra llengua contribueix, de manera modesta però ferma, a la seua normalitat i, cosa important ací, a la seua unitat.

No puc acabar sense fer esment d'una qüestió que afecta no solament l'ensenyament de la matemàtica sinó, en general, el benestar de la nostra societat. Les mesures que s'estan prenent contra els serveis públics i, en particular contra l'ensenyament, ens encaminen cap a l'empobriment material i intel·lectual de la nostra societat i ens està hipotecant el futur. L'excusa de la crisi no pot servir per justificar aquesta situació. És exemplar la lluita de la comunitat educativa per canviar la situació i, en particular, la del nostre alumnat, en entendre aquestes circumstàncies. Aprofite per donar un missatge optimista i estic convençut que aconseguirem capgirar aquesta situació.

Finalment aprofitem aquest escrit, per agrair a les universitats i societats esmentades la seua col·laboració en el desenvolupament de la **Prova Cangur** al País Valencià. Aquest ajut possibilita la seua realització.

Màrius Josep Fullana i Alfonso
Coordinador de la Comissió Cangur al País Valencià.

XVII Cangur SCM Nivell 1

Enunciats (15 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

1. En Josep vol pintar l'eslògan *«VISCA EL CANGUR»* en una paret. Vol que lletres diferents tinguin colors diferents, i que lletres iguals tinguin el mateix color. Quants colors necessitarà?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 11 E) 13

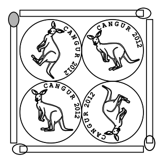
---

2. Una pissarra fa 6 m d'ample. La part del mig fa 3 m. Les altres dues parts tenen la mateixa amplada. Quina és l'amplada de la part de la dreta?

A) 1 m B) 1,25 m C) 1,5 m D) 1,75 m E) 2 m

---

3. La Sílvia pot posar 4 monedes dins un quadrat fet amb 4 llumins (vegeu la imatge). Quants llumins necessita, com a mínim, per a construir un quadrat que contingui 16 monedes que no se superposin?



A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 16

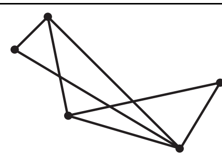
---

4. En un avió, les files estan numerades de l'1 fins al 25, però la fila número 13 no existeix. La fila número 15 té només 4 seients per a passatgers, mentre que la resta tenen 6 seients per a passatgers. Quants seients per a passatgers hi ha a l'avió?

A) 120 B) 138 C) 142 D) 144 E) 150

---

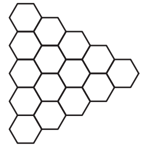
5. Al País de les Meravelles hi ha 5 ciutats. Cada parella de ciutats està connectada per una carretera. Algunes de les carreteres són visibles i d'altres invisibles. Tal com podeu veure a la figura, hi ha 7 carreteres visibles. L'Alícia té unes ulleres màgiques: quan mira el mapa amb aquestes ulleres només veu les que són invisibles. Quantes carreteres veu l'Alícia?

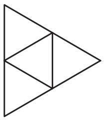


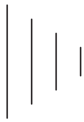
A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 3

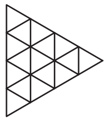
---

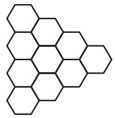
6. Quin dibuix obtenim unint els centres de totes les parelles d'hexàgons de la figura de la dreta que tenen algun costat comú?

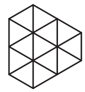


A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

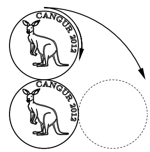
7. A 6 li sumem 3. A continuació multipliquem el resultat per 2 i després li sumem 1. Com escrivim aquesta operació?

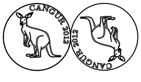
A) $(6 + 3 \cdot 2) + 1$ B) $6 + 3 \cdot 2 + 1$ C) $(6 + 3) \cdot (2 + 1)$
D) $6 + 3 \cdot (2 + 1)$ E) $(6 + 3) \cdot 2 + 1$

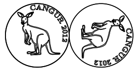
8. Un globus pot arribar a aixecar una cistella que porti, en el seu interior, 80 quilos de pes. Dos globus, del mateix tipus, poden arribar a aixecar la mateixa cistella amb 180 quilos. Quin és el pes de la cistella?

A) 20 kg B) 50 kg C) 30 kg D) 40 kg E) 10 kg

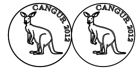
9. La moneda superior gira sense lliscar al voltant de la moneda inferior, que es manté fixa, fins a la posició que s'indica a la figura. Quina és la posició final de les monedes?



A) 

B) 

C) 

D) 

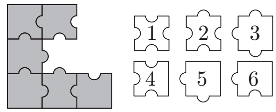
E) Depèn de la velocitat de rotació.

10. La Rita i l'Ovidi han anat a buscar pomes i peres a l'hort de la seva àvia; en total han collit 25 peces de fruita. De camí cap a casa seva, la Rita es menja una poma i tres peres i l'Ovidi es menja tres pomes i dues peres. En arribar a casa seva, veuen que els queden el mateix nombre de peres que de pomes. Quantes peres han agafat de l'hort de la seva àvia?

A) 12 B) 13 C) 16 D) 20 E) 21

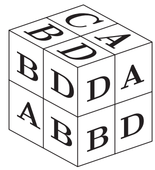
Qüestions de 4 punts

11. Quines són les tres peces del puzle que cal afegir per completar el quadrat?



A) 1, 3, 4 B) 1, 3, 6 C) 2, 3, 5 D) 2, 5, 6 E) 2, 3, 6

12. La Telma té vuit daus. Cada dau té pintada la mateixa lletra, una A, una B, una C o una D en totes les cares. Amb els 8 daus construeix el cub de la figura, en la qual dos daus adjacents (es toquen per una cara) tenen pintades lletres diferents. Quina lletra correspon a l'únic cub del qual no en veiem cap cara?



A) A B) B C) C D) D E) No es pot saber.

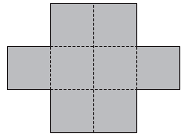
13. Quan són les 4 de la tarda a Londres, són les 5 de la tarda a Manresa, i les 8 del matí del mateix dia a San Francisco. L'Anna va arribar a San Francisco a les 9 del vespre d'ahir. Quina era l'hora a Manresa en aquell moment?

A) Les 6 del matí d'ahir
B) Les 6 de la tarda d'ahir
C) Les 12 del migdia d'ahir
D) Les 12 de la nit
E) Les 6 d'aquest matí

14. Tenim els nombres enters i positius pintats amb els colors roig, blau o verd d'aquesta manera: l'1 de color roig, el 2 de color blau, el 3 de color verd, el 4 de color roig, el 5 de color blau, el 6 de color verd, i així successivament. De quin color pot ser el nombre resultant de sumar un nombre roig amb un nombre blau?

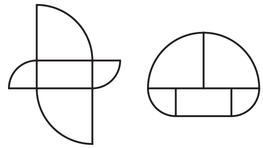
A) Verd B) Roig o blau C) Blau D) Depèn dels nombres. E) Roig

15. El perímetre de la figura, construïda amb quadrats iguals, és de 42 cm. Quina és l'àrea de la figura?



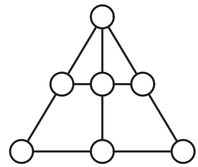
A) 8 cm^2 B) 9 cm^2 C) 24 cm^2 D) 72 cm^2 E) 128 cm^2

16. Les dues figures que hi ha a la dreta estan formades per les mateixes cinc peces. Els costats del rectangle fan 5 cm i 10 cm i les altres peces són quarts de cercle. La diferència entre els perímetres de les dues figures és



A) 2,5 cm B) 5 cm C) 10 cm D) 20 cm E) 30 cm

17. Col·loca les xifres de l'1 al 7 dins dels cercles de la figura, de manera que la suma dels nombres de cada línia sigui la mateixa. Quina xifra hi ha al vèrtex superior del triangle?

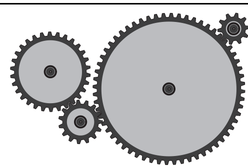


A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

18. Una pilota de goma cau des de la teulada d'una casa de 10 m d'altura. Cada cop que toca a terra rebota fins a arribar als 4/5 de l'altura anterior. Quants cops apareixerà davant d'una finestra que té el marc inferior a 5 m de terra i el marc superior a 6 m?

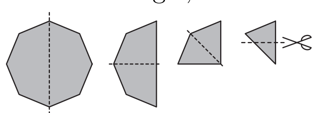
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

19. Tenim quatre rodes dentades que formen un engranatge, tal com es veu al dibuix. La primera té 30 dents, la segona, 15; la tercera, 60, i la quarta, 10. Quantes voltes dóna la quarta roda quan la primera en dóna una?

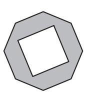
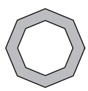
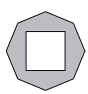
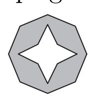
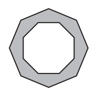


A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

20. Pleguem un octògon regular de paper tres cops seguits, sempre per la meitat del que ens queda, i obtenim un triangle, tal com es mostra al dibuix.



A continuació en tallem un tros, de manera que el tall formi un angle recte amb un dels costats iguals, tal com es veu a la figura. Quina de les imatges següents representa millor el que veurem quan despleguem el paper?

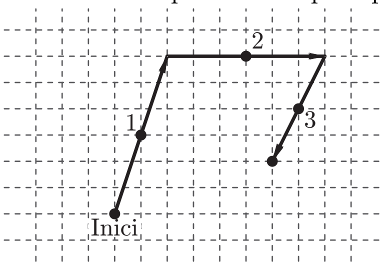
A)  B)  C)  D)  E) 

Qüestions de 5 punts

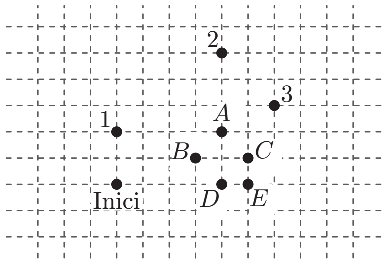
21. La Maria i en Lluís corren al voltant d'una pista circular, de manera que, al principi, comencen en punts diametralment oposats, i corren en el mateix sentit. La velocitat de cursa de la Maria és 9/8 de la velocitat d'en Lluís. Quantes voltes haurà completat en Lluís quan la Maria aconsegueixi atrapar-lo?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 9 E) Depèn de la longitud de la pista.

22. Els cangurets Hip i Hop estan jugant a saltar per damunt d'unes pedres de manera que en cada salt que fan deixen la pedra just al mig del segment que representa cada salt. El dibuix 1 mostra els tres salts que ha fet en Hip sobre les pedres 1, 2 i 3. El dibuix 2 mostra on són les pedres 1, 2 i 3 que saltarà en Hop, en aquest ordre, i el punt on començarà. En quin dels punts, A, B, C, D o E anirà a parar en Hop després del tercer salt?



Dibuix 1: Hip



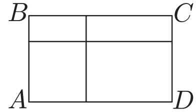
Dibuix 2: Hop

A) A B) B C) C D) D E) E

23. En una festa d'aniversari hi ha 12 criatures que tenen 6, 7, 8, 9 o 10 anys. Si agrupem els assistents per edats, el grup més nombrós és el de 8 anys, i al grup dels de 6 anys hi ha quatre criatures. Quina és la mitjana d'edat de les 12 criatures?

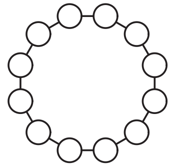
A) 5,5 anys B) 6 anys C) 6,5 anys D) 7 anys E) 7,5 anys

24. Dividim el rectangle $ABCD$ en 4 rectangles, tal com es veu al dibuix. Els perímetres de tres d'aquests rectangles fan 11, 16 i 19 centímetres. El perímetre del quart rectangle no és ni el major ni el menor. Quant fa el perímetre del rectangle inicial $ABCD$?



A) 28 cm B) 30 cm C) 32 cm D) 38 cm E) 40 cm

25. Col·loquem tots els nombres de l'1 al 12 en un cercle, de manera que la diferència entre dos nombres veïns sigui 1 o 2. Quina de les parelles següents pot correspondre a una parella de nombres veïns?



A) 5 i 6 B) 10 i 9 C) 6 i 7 D) 8 i 10 E) 4 i 3

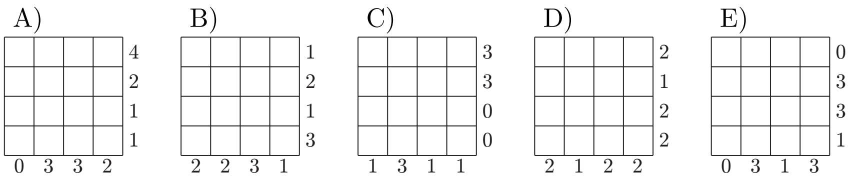
---

26. En Pere vol obtenir quadrats de costats enters tallant un rectangle de mides 6×7. Quin és el nombre mínim de quadrats que pot aconseguir?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 9 E) 3

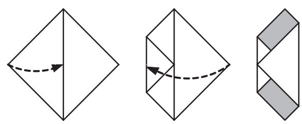
---

27. Pintem de color vermell algunes caselles d'una taula 4×4. Després indiquem, al final de cada fila, el nombre de caselles vermelles que té, i fem el mateix a sota de cada columna. A continuació esborrem el color vermell. De les cinc taules següents, quina pot ser la que hem pintat?



---

28. Dobleguem dues vegades un tros de paper quadrat, tal com mostra el dibuix. Trobeu la suma de les àrees dels rectangles ombrejats, si sabem que l'àrea del quadrat original és 64 cm^2.



A) 10 cm^2 B) 14 cm^2 C) 15 cm^2 D) 16 cm^2 E) 24 cm^2

---

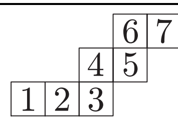
29. Els números de tres cases del meu carrer estan formats amb les mateixes xifres, cap de les quals és igual a 0: *abc*, *bc*, *c*. Si la suma dels números d'aquestes tres cases és 912, quin és el valor de *b*?

$$\begin{array}{r} abc \\ +\ \ bc \\ +\ \ \ c \\ \hline 912 \end{array}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 0

---

30. Un cub rodola pas a pas en el pla tot girant sobre les arestes. La cara inferior passa per les posicions 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7, en aquest ordre. En quines d'aquestes dues posicions la cara inferior del cub és la mateixa?



A) 1 i 7 B) 1 i 6 C) 1 i 5 D) 2 i 7 E) 2 i 6

XVII Cangur SCM Nivell 1

Enunciats (22 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

1. A 6 li sumem 4. A continuació multipliquem el resultat per 7 i després li sumem 9. Com escrivim aquesta operació?

A) $(6 + 4 \cdot 7) + 9$ B) $6 + 4 \cdot 7 + 9$ C) $(6 + 4) \cdot (7 + 9)$
D) $6 + 4 \cdot (7 + 9)$ E) $(6 + 4) \cdot 7 + 9$

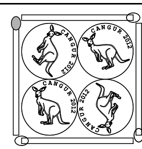
---

2. Un equip de bàsquet ha fet 356 punts després de quatre partits. En els dos primers partits l'equip va fer 95 i 103 punts. En els altres dos partits va fer exactament el mateix nombre de punts. Quants punts va fer aquest equip en l'últim partit?

A) 76 B) 78 C) 79 D) 82 E) 86

---

3. Sílvia pot posar 4 monedes dins un quadrat fet amb 4 llumins (vegeu la imatge). Quants llumins necessita com a mínim per a construir un quadrat que continga 36 monedes que no se superposen?



A) 98 B) 12 C) 15 D) 24 E) 36

---

4. La família Cangur va anar a collir bolets i en va trobar 180. Se'n va menjar 20 per sopar i la resta els va congelar o els va possar a assecar. Va posar a assecar 40 bolets més que els que va congelar. Quants en va assecar?

A) 60 B) 80 C) 160 D) 120 E) 100

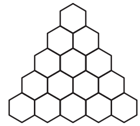
---

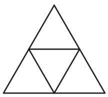
5. Quan són les 4 de la vesprada d'un dijous a Londres, són les 5 de la vesprada del dijous a Gandia, i és justament mitjanit, entre el dijous i el divendres, a Perth, a Austràlia. El Cangur va gitar-se ahir a Perth a les 9 de la nit. Quina hora era a Gandia en aquell moment?

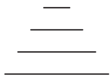
A) Les 2 de la vesprada d'ahir
B) Les 4 de la matinada d'hui
C) Les 2 de la vesprada d'hui
D) Les 12 del migdia d'ahir
E) Les 9 de la nit d'ahir

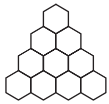
---

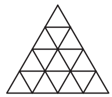
6. Quin dibuix obtenim unint els centres de totes les parelles d'hexàgons de la figura de la dreta que tenen algun costat comú?

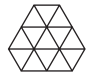


A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

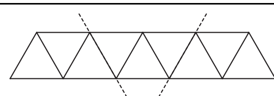
7. Toni va comprar 14 bombons, dels quals 8 eren rodons i els altres quadrats. 7 bombons eren de xocolata negra i els altres de xocolata amb llet. Dels bombons quadrats, exactament 2 no eren de xocolata negra. Quants bombons rodons de xocolata amb llet va comprar Toni?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

8. Albert, Berta, Carles i Diana tenen uns quants diners. Entre Albert i Berta tenen 5 €. Entre Carles i Diana tenen 6 €. Els dos xics junts tenen 7 €. Quants diners tenen en conjunt les dues xiques?

A) 8 € B) 7 € C) 6 € D) 5 € E) 4 €

9. Una tira de paper es pot dividir exactament en nou triangles equilàters com es pot veure en la figura. Quin polígon podem obtenir si dobleguem la tira justament per les línies de punts?



A) Un triangle
B) Un quadrilàter
C) Un hexàgon
D) Un octàgon
E) Un polígon de nou costats

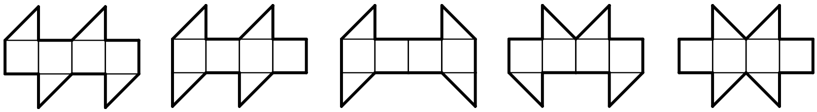
10. Rita i Ovidi han anat a buscar pomes i peres a l'hort de la seva àvia i en total han collit 25 peces de fruita. De camí cap a casa seva, Rita es menja una poma i tres peres i Ovidi es menja tres pomes i dues peres. En arribar a casa seva, veuen que els queden el mateix nombre de peres que de pomes. Quantes peres han agafat de l'hort de la seva àvia?

A) 12 B) 13 C) 16 D) 20 E) 21

Qüestions de 4 punts

11. Totes les figures següents, excepte una, poden ser el desplegament d'un cub. Quina és la figura que no ens permet compondre un cub?

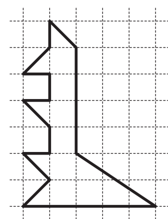
A) B) C) D) E)



12. Telma té vuit daus. Cada dau porta pintada la mateixa lletra, una A, una B, una C o una D en totes les cares. Amb els vuit daus construeix el cub de la figura, en la qual dos daus adjacents (es toquen per una cara) tenen pintades lletres diferents. Quina lletra correspon a l'únic cub del qual no en veiem cap cara?

A) A B) B C) C D) D E) No es pot saber.

13. Quin és el nombre mínim de triangles en què podem descompondre aquesta figura que representa el Cangur del país dels triangles?

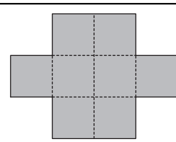


A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

14. Tenim els nombres enters i positius pintats amb els colors roig, blau, groc o verd d'aquesta manera: l'1 de color roig, el 2 de color blau, el 3 de color groc, el 4 de color verd, el 5 de color roig, el 6 de color blau, el 7 de color groc, el 8 de color verd, i així successivament. De quin color és el nombre resultant de sumar un nombre roig amb un nombre groc?

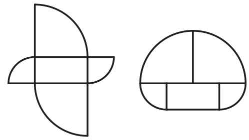
A) Pot ser de qualsevol dels quatre colors B) Pot ser roig o verd
C) Pot ser groc o verd D) Pot ser blau o verd E) Verd

15. El perímetre exterior de la figura, construïda amb quadrats iguals, és de 56 cm. Quina és l'àrea de la figura?



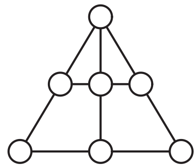
A) 128 cm^2 B) 72 cm^2 C) 48 cm^2 D) 24 cm^2 E) 16 cm^2

16. Fixa't bé en els dibuixos. Les dues figures són formades per les mateixes cinc peces. Els costats del rectangle mesuren 4 cm i 9 cm i les altres peces són quarts de cercle. Quina és la diferència entre els perímetres de les dues figures?



A) 4 cm B) 17 cm C) 26 cm D) 13 cm E) 9 cm

17. Col·loqueu els números de l'1 al 7 dins dels cercles de la figura, de manera que la suma dels números de cada línia siga la mateixa. Quin número hi ha en el vèrtex superior del triangle?

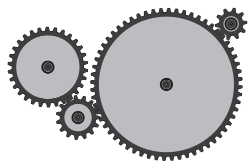


A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

18. A un nombre de cinc xifres que té la suma de les seues xifres igual a 2 li hem sumat un nombre de dues xifres i, sorprenentment, el resultat és també un nombre que té la suma de les seues xifres igual a 2. Quin és, doncs, el resultat obtingut?

A) 11.000 B) 10.010 C) 20.000 D) 10.001 E) 10.100

19. Tenim quatre rodes dentades que formen un engranatge, tal com es veu en el dibuix. La primera té 30 dents; la segona, 15; la tercera, 60, i la quarta, 10. Quantes voltes dóna la quarta roda quan la primera en dóna una?



A) 1 B) 3 C) 4 D) 8 E) 2

20. Sobre una taula hi ha dos muntons de pedres; el primer té set pedres i el segon, deu. Adrià vol fer un joc que consisteix a llevar pedres successivament fins que no en quede cap. Les úniques accions que pot fer són:

- Llevar tres pedres del primer muntó.
- Llevar dues pedres del segon muntó.
- Llevar una pedra de cada muntó.

Quin és el nombre mínim d'accions que ha de fer Adrià perquè no quedi cap pedra sobre la taula?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Qüestions de 5 punts

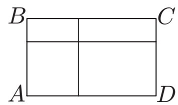
21. Maria i Lluís corren al voltant d'una pista circular, de manera que, al principi, comencen en punts diametralment oposats i corren en el mateix sentit. La velocitat de cursa de Maria és 9/8 de la velocitat de Lluís. Quantes voltes haurà completat Lluís quan Maria l'aconseguisca atrapar?

A) 4 B) 8 C) 9 D) 2 E) Depèn de la longitud de la pista

22. Una pilota de goma cau des de la teulada d'una casa de 10 m d'altura. Cada cop que toca a terra rebota fins arribar als 4/5 de l'altura anterior. Si mirem per una finestra que té el marc inferior a 5 m de terra i el marc superior a 6 m, quantes vegades la pilota apareix davant de la finestra?

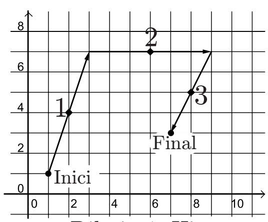
A) 7 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

23. S'ha dividit el rectangle $ABCD$ en quatre rectangles tal com es veu en el dibuix. Els perímetres de tres d'aquests rectangles mesuren 21, 24 i 39 centímetres. El perímetre del quart rectangle no és ni el major ni el menor. Quant mesura el perímetre del rectangle inicial $ABCD$?

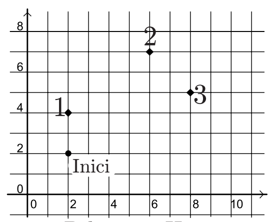


A) 45 cm B) 84 cm C) 63 cm D) 60 cm E) Un altre valor

24. Els cangurets Hip i Hop estan jugant a saltar per damunt d'unes pedres en un terreny on hi ha marcats uns eixos de coordenades. En cada salt que fan deixen la pedra just al mig del segment que representa cada salt. El dibuix 1 mostra els tres salts que ha fet Hip, que ha començat en el punt (1,1), sobre les pedres 1, 2 i 3. En el dibuix 2 es mostren les mateixes pedres 1, 2 i 3, que Hop ha de saltar en aquest mateix ordre, començant en el punt (2,2). En quin punt caurà Hop després del tercer salt?



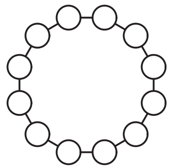
Dibuix 1: Hip



Dibuix 2: Hop

A) $(6,4)$ B) $(7,3)$ C) $(6,2)$ D) $(7,2)$ E) $(5,3)$

25. Col·loquem tots els números de l'1 al 12 en un cercle, de manera que la diferència entre dos números que siguen veïns siga 1 o 2. Quina de les parelles següents pot correspondre a una parella de nombres veïns?



A) 8 i 10 B) 4 i 3 C) 5 i 6 D) 10 i 9 E) 6 i 7

---

26. Pere vol obtenir quadrats de costats enters tallant un rectangle de mides 6×7. Quin és el nombre mínim de quadrats que pot aconseguir?

A) 4 B) 3 C) 7 D) 5 E) 9

---

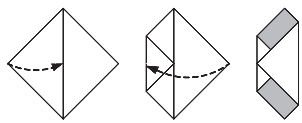
27. Els números de les tres cases on el meus amics i jo vivim són formats amb les mateixes xifres, cap de les quals és igual a 0: abc, bc, c. Sabent que la suma dels números de les tres cases és 912, quin és el valor de b?

$$\begin{array}{r} abc \\ +\ \ bc \\ +\ \ \ c \\ \hline 912 \end{array}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 0

---

28. Dobleguem dues vegades un tros de paper de forma quadrada, de la manera que mostra el dibuix. Trobeu la suma de les àrees dels rectangles ombrejats, si l'àrea del quadrat original és de 64 cm^2.



A) 10 cm^2 B) 14 cm^2 C) 15 cm^2 D) 16 cm^2 E) 24 cm^2

---

29. Joan ha guanyat quatre valuoses medalles en competicions atlètiques: una d'or i una de bronze en els campionats d'Europa, i una d'or i una de plata en els campionats del món. Joan vol mostrar les quatre medalles en una vitrina, una al costat de l'altra, sempre per la cara que indica en quin campionat les va guanyar, però, això sí, les dues medalles d'or sempre les posarà juntes. Quantes ordenacions diferents pot fer Joan de les seues medalles?

A) 3 B) 6 C) 12 D) 24 E) 48

---

30. Fem servir els vuit dígits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8, exactament una vegada cada un, per a formar dos nombres naturals de quatre xifres. Quina és la diferència més menuda que podem aconseguir entre estos dos nombres si ho fem de totes les maneres possibles?

A) 124 B) 247 C) 358 D) 643 E) 1357

Premis. Balears

Primer premi

Ivan Torres Pomar (IES Sa Colomina, Eivissa), 150 punts

Segon premi

Carlos Fernández Pascuchi (Col·legi Pedro Poveda, Palma), 141,25 punts

Tercer premi

Marina Rodriguez Higuero (IES Joan Alcover, Palma), 137,5 punts

Altres premis

Yue Shen (Centre Escolar Lluís Vives, Palma), 133,75 punts
Carlos Casillas Gallardo (La Salle, Palma), 132,5 punts
Pau Hernández Aleña (IES Josep Maria Llompart, Palma), 128,75 punts
Clara Santos Thomàs (IES Guillem Colom Casasnovas, Sóller), 128 punts
Magdalena Llompart Frau (IES Josep Maria Llompart, Palma), 127,5 punts
ex aequo, Andrea Schiffer Dávila (Col·legi Mestral, Eivissa) i
Yunpeng Xing (IES Calvià, Calvià), 123,75 punts

Premis. País Valencià

Primer premi

Alejandro Martos Berrezuelo (IES de Tavernes Blanques), 150 punts

Segon premi

Jorge Baeza Ballesteros (San Pedro Pascual, València), 141.25 punts

Tercer premi

Mar Ciscar Montsalvatge (Paidos, Dénia), 140 punts

Altres premis

Alaá Moucharrafie Abdulsamat (IES Penyagolosa, Castelló), 133.75 punts
Mar Parra Boronat (IES Gabriel Ciscar, Oliva), 133.75 punts
Ivan Pinto Huguet (IES Joan Coromines, Benicarló), 127.5 punts
Francesc Pedrós Raimundo (IES La Garrigosa, Meliana), 126.25 punts
Pilar Soria Monzó (IES Gregori Maians, Oliva), 119.5 punts
Jayden Noble (IES Villa de Aspe, Aspe), 118.75 punts
ex aequo, Marina Soler Lacruz (IES Benlliure, València) i
Pepe Tatay Sangüesa (Mas Camarena, Betera), 116 punts

Premis i mencions. Catalunya i Andorra

Primers premis, ex aequo
Joan Llobera Querol (Institut Samuel Gili i Gaya, Lleida) i
Raúl Ramos Solano (Jardí, Granollers), 150 punts

Premis per al pòdium, ex aequo
Roger Bergadà Batlles (Institut Maria de Bell-lloc, Bigues i Riells),
Xavier Cano Serra (Institut de Palamós, Palamós),
Horacio Castillo Mateo (Institut Fort Pius, Barcelona) i
Genís Guillem Mimó (Institut Escola Industrial, Sabadell), 145 punts

Premis de categoria B, ex aequo
Guim Auró Cabello (Institut Ernest Lluch, Barcelona),
Álex Gallego Casals (Sant Pau Apòstol, Tarragona),
Max Doblas Font (Institut Cirviànum de Torelló, Torelló) i
Gil Puig Surroca (Institut Montgrí, Torroella de Montgrí), 143,75 punts

Premi de categoria C
Javier Geis Chang (Sagrat Cor-Sarrià, Barcelona), 141,25 punts

Premis de categoria D, ex aequo
Santi Pérez García (Institut La Segarra, Cervera),
Marc Homs Donés (Institut Duc de Montblanc, Rubí),
Guillem Rovira Cassignet (Tecnos, Terrassa),
Junjie Ji (Institut Rubió i Ors, L'Hospitalet de Llobregat) i
Júlia Ferrer Gil (Pare Coll, Girona), 140 punts

Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions

ex aequo Eric Valls Grünewald (Aula Escuela Europea, Barcelona),
Eloi Torrents Juste (Institut de Terrassa, Terrassa),
Anna Martínez Pulido (Institut Pius Font i Quer, Manresa),
Néstor Dougas Chavarría (Institut Mediterrània, El Masnou)
i Joan Arnalot Farràs (IPSI, Barcelona), 138,75 punts
Ariadna Serrano Ramírez
(Institut Can Planas, Barberà del Vallès), 138,25 punts
ex aequo Adam Teixidó Bonfill (Institut Priorat, Falset),
Guillem Molina Galera
(Institut Castellet, Sant Vicenç de Castellet),
Cesc Folch Aldehuelo (Montessori-Palau, Girona),
i Álex Castañé Pérez (SES de Cervelló, Cervelló), 137,5 punts
Roger Sala Marco (Institut Ernest Lluch, Barcelona), 136,25 punts
ex aequo Arnau Serra Rueda (Institut Bernat Metge, Barcelona) i
Marta Florido Llinàs (Institut Maragall, Barcelona), 136 punts
ex aequo Carlos Wang (Institut Ernest Lluch, Barcelona),
Sònia Morera Ausin (Aula Escuela Europea, Barcelona),
Clara Marcè Rodríguez (Garbí, Esplugues de Llobregat),
Víctor Garcia Grajera (Gem, Mataró),
Ignasi Cortés Arbués (Montserrat, Barcelona),
Albert Cheto Barrera (Viaró, Sant Cugat del Vallès) i
Laura Balagué Dobón (Institut Front Marítim, Barcelona), 135 punts
Daniel Regueiro Sánchez (Casa del Roure, Barcelona), 134,75 punts
Miquel Tibau Baltrons (Immaculada Concepció, Lloret de Mar), 134 punts
ex aequo Sergi Rafael Miguel (Sagrat Cor de Jesús, Vic),
Arnau Navarro Serra (Institut Secretari Coloma, Barcelona),
Joel Moreno Vazquez (CEPA Oriol Martorell, Barcelona) i
Martí Catalan Franquesa (Sagrat Cor de Jesús, Vic), 133,75 punts
Anna Ribera Tor (Institut Joan Brudieu, La Seu d'Urgell), 133 punts
ex aequo Ainhoa Zaldúa Sureda (Institut de Tossa de Mar),
Aleix Rodríguez Zaragoza
(Institut Dolors Mallafrè i Ros, Vilanova i la Geltrú),
Núria Planes Conangla (Institut Manuel Blancafort, La Garriga),
Marta Migó Cortés (Aula Escuela Europea, Barcelona),
Adrià Medina Diez (Institut Icària, Barcelona),
Guillem Llongarriu Gorchs (Institut Abat Oliba, Ripoll),
Laia Iturrizaga Zurita (Institut Francisco de Goya, Barcelona),
Irene González Fernández (Institut Montilivi, Girona) i
Celia Aranda Reina (Institut Duc de Montblanc, Rubí), 132,5 punts

ex aequo Diego Sánchez (Europa, Sant Cugat del Vallès),
Joan Ribó Rovira (Institut Montsoriu, Arbúcies),
Ariadna Gistàs Barrull (Aula Escuela Europea, Barcelona) i
Aleix Fernández Salavedra
(Institut Pere Alsius i Torrent, Banyoles), 131,25 punts
Joan Ariño Bernad (Institut Vil·la Romana, La Garriga), 131 punts
ex aequo Helena Sánchez Buixeda (Santa Maria, Blanes) i
Blanca Rius Sansalvador (Pureza de María, Sant Cugat del Vallès), 130 punts
Bernat Rehues Garreta (Institut Gabriel Ferrater i Soler, Reus), 129 punts
ex aequo Adrià Vilalta Videgain (Sant Josep, Reus),
Sebastián Sánchez Menéndez (Santo Ángel, Gavà),
Nil Puertas Ametller (Institut Gorgs, Cerdanyola del Vallès),
Núria Parera-Nieto Salas (Montessori-Palau, Girona),
Laura Ortega Lechuga (Institut Isaac Albéniz, Badalona),
Gemma Graugés Graell (Casp-Sagrat Cor de Jesús, Barcelona),
Carlos Fernández Espinosa (SES Cap de Creus, Cadaqués),
Emily Dahl (Europa, Sant Cugat del Vallès),
Carme Crous Bruñol (Institut Ramon Muntaner, Figueres), i
Eduard Calsina Pla-Giribert
(Institut Pere Calders, Cerdanyola del Vallès), 128,75 punts
ex aequo Maria Balaguer Prat (Institut Moianès, Moià) i
Marta Altarriba Fatsini (Institut Jaume Callís, Vic), 128,5 punts
ex aequo Enric Royo Jiménez (Casa del Roure, Barcelona) i
Eduard Miret Tomàs (Institut Joan Brudieu, La Seu d'Urgell), 128 punts

XVII Cangur SCM Nivell 1

Solucions (15 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

1. D. 11.

Es pot veure que hi ha onze lletres diferents que són, per ordre alfabètic, *A*, *C*, *E*, *G*, *I*, *L*, *N*, *R*, *S*, *U*, *V*.

2. C. 1,5 m.

Si tota la pissarra fa 6 m i la part del mig fa 3 m, entre les dues parts dels costats fan 3 m. Si aquestes dues parts són iguals, cada una tindrà una amplada de $\frac{2}{3}$ =1,5 m.

3. A. 8.

Es tracta de veure que l'enunciat demana quants llumins es necessiten per construir el quadrat, és a dir, el perímetre que encercla les monedes. Si el quadrat ha de contenir 16 monedes cada costat haurà de ser doble del de la figura de l'enunciat.

4. 3. 142.

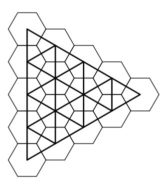
Si llegim atentament l'enunciat veurem que el nombre de seients que te l'avió de l'enunciat és $4 + 23 \times 6 = 142$.

5. E. 3.

Hi ha 5×4 parelles de ciutats, però com que la carretera de *A* a *B* és la mateixa que la de *B* a *A*, caldrà un total de 10 carreteres. Si n'hi ha 7 de visibles, n'hi haurà 3 d'invisibles.

6. C. Vegeu la figura.

Es mostren els quinze hexàgons de l'enunciat i els segments que es demana construir.



7. E. $(6+3)\cdot 2+1$.

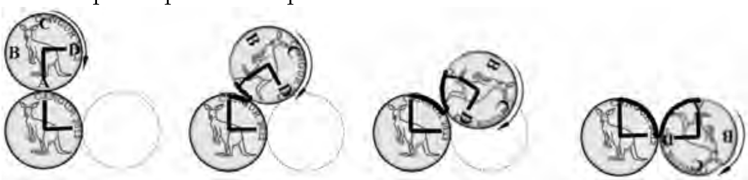
Es tracta de recordar quina és la prioritat de les operacions en l'escriptura d'expressions algebraiques.

8. A. 20 kg.

Si un globus pot aixecar el pes de la cistella i 80 quilos de càrrega, dos globus podran aixecar 2 cistelles i 160 quilos. Ens diuen que dos globus poden aixecar una cistella i 180 quilos. La cistella ha de pesar 180 - 160 = 20 quilos

9. A. Vegeu la figura.

La figura mostra tres posicions del gir d'una moneda sense lliscar al voltant de l'altra. S'ha posat de manifest que no hi ha lliscament pel fet que els dos arcs assenyalats en cada posició són iguals i s'ha dibuixat un angle recte en cada moneda per copsar-ne la posició relativa.



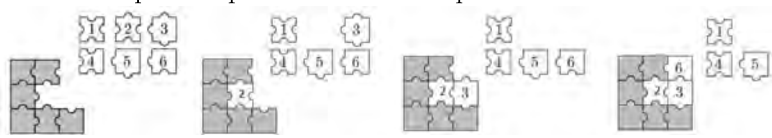
10. B. 13.

Entre tots dos han menjat 4 pomes i 5 peres i, doncs, els quedaran 16 peces de fruita que, segons l'enunciat, seran 8 pomes i 8 peres. El nombre de peres que havien agafat és $8+5=13$.

Qüestions de 4 punts

11. E. 2, 3, 6.

S'observa que l'única peça que pot anar al centre del puzle és la 2. Quan ja està posada la 2, a la seva dreta hi encaixarien la 3 i la 5, però no escau la 5: no podríem completar el puzle. Un cop posada la 3 veiem que a sobre només hi pot anar la 6 per completar el trencaclosques.



12. B. La lletra B.

El cub que no veiem té una cara amb comú amb els daus als quals pertanyen les tres cares ombrejades a la figura, una A, una C i una D. Per tant el dau que ens interessa ha de tenir una B.

13. E. Les 6 d'aquest matí.

Com que quan a Manresa són les 17 h a San Francisco són les 8 h, vol dir que la diferència horària és de 9 h. Per tant quan són les 21 hores a San Francisco, a Manresa són 9 h més tard; com que $21 + 9 = 30$ això vol dir que ja són les 6 del matí d'avui.

14. A. Verd.

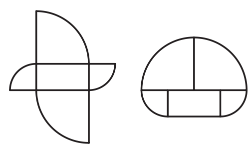
Observeu que tots els nombres de color roig són un múltiple de 3 més 1; els de color blau, un múltiple de 3 més 2 i els de color verd corresponen als múltiples de 3. Aleshores si sumem un nombre roig $(3k + 1)$, amb un nombre blau $(3m + 2)$, la suma serà un múltiple de 3 $(3(k + m + 1))$, és a dir, de color verd.

15. D. 72 cm^2.

El perímetre de la figura consisteix de 14 vegades el costat dels quadrats iguals que la formen. Per tant el costat de cada quadrat és de 3 cm i la seva àrea és 9 cm^2. Com que hi ha vuit quadrats, l'àrea de la figura és de 72 cm^2.

16. D. 20 cm.

El perímetre de la figura de la dreta té quatre quarts de cercle (dos grans i dos menuts) i un segment de 10 cm, i el de l'esquerra a més dels quatre quarts de cercle té dos segments de 10 cm i dos de 5cm. La diferència entre els perímetres és doncs $10 + 5 + 5 =$ 20 cm.



17. C. 4.

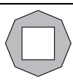
Tenim cinc segments amb tres xifres en cadascun d'ells. Com que el resultat de sumar les xifres de cada segment és el mateix, la suma d'aquests resultats és múltiple de 5. Ara observem que totes les xifres pertanyen a dos segments, excepte la del vèrtex superior que pertany a tres i, per tant, si anomenem a la xifra del vèrtex superior, com que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ la suma dels cinc segments és $2 \times 28 + a$, que només és múltiple de 5 si $a = 4$.

18. D. 6.

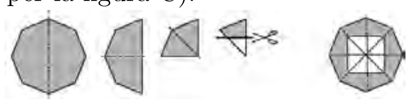
En caure des dels 10 m passa davant de la finestra (1r cop) i rebota fins a 8 m i passa davant de la finestra (2n cop), torna a caure i a passar davant de la finestra (3r cop) i rebota fins a 6,4 m (4t cop que passa). Seguidament torna a caure i a passar (5è cop) i rebota fins a 5,28 m i torna a baixar (tot això en el 6è cop que apareix davant de la finestra). Quan arriba a terra rebota fins a 4,224 m, que queda per sota de la finestra i ja no es veurà més.

19. A. 3.

Tant se val el número de rodes que hi ha entre la primera i la darrera, quan la primera fa una volta sencera s'engranen 30 dents i com que la darrera en té 10 li caldrà fer 3 voltes senceres per completar les 30.

20. C.  .

Els angles del triangle que retallem, el que produeix el forat, mesuren 45°, 45° i 90°. Quan desfem els plecs ens quedaran tots els angles de 90°, un quadrat en la posició donada per la figura C).



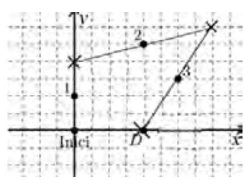
Qüestions de 5 punts

21. B. 4 voltes.

Si n és el nombre de voltes que ha fet en Lluís, la Maria n'haurà fet $n + \frac{1}{2}$. Com que hauran estat el mateix temps corrent, la relació entre els espais recorreguts és la mateixa que entre les respectives velocitats. Per tant ha de complir-se que $n + \frac{1}{2} = \frac{9}{8}n$ d'on se'n dedueix que $n = 4$.

22. D.

Suposem que hem posat uns eixos de coordenades paral·lelament a la quadrícula i que el punt de sortida és el (0,0). El primer salt acaba en el (0, 4), el segon en el (8, 6) i el tercer salt acaba doncs en el punt (4, 0) perque la pedra 3 està en el punt (6,3). El resultat és doncs el punt D.

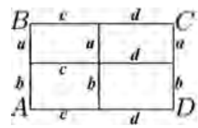


23. E. 7,5 anys.

Com que sabem que 4 criatures tenen 6 anys, les vuit restants tenen 7, 8, 9 i 10 anys. Com que l'edat de 8 anys és la més representada cal que com a mínim hi hagi 5 criatures de 8 anys. No n'hi pot haver més perque com que n'hi ha de totes les edats com a mínim n'hi ha una de cadascuna de les edats 7, 9 i 10 anys. Tenim doncs que la suma de les edats és $4\times6+1\times7+5\times8+1\times9+1\times10 = 90$, i la mitjana d'edats és $\dfrac{90}{12} = 7{,}5$ anys

24. B. 30 cm.

Si hem dividit el rectangle en quatre rectangles, com a la figura, es compleix que el rectangle de major perímetre i el de menor perímetre només tenen un vèrtex en comú.

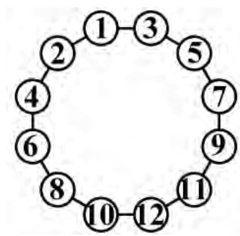


Si suposem que el de menor perímetre és el de costats a i c, mirant el de costats a i d i el de costats b i c serà $2a + 2c \leq 2a + 2d$ i $2a + 2c \leq 2b + 2c$ i, per tant $c \leq d$ i $a \leq b$. A partir d'aquí es dedueix que $2a + 2d \leq 2b + 2d$ i $2b + 2c \leq 2b + 2d$ i, per tant, el rectangle de major perímetre és el que té costats b i d.

Aleshores, en el nostre problema, com que el rectangle del qual desconeixem el perímetre no és ni el menor ni el major, el de menor perímetre serà el d'11 cm i el de major perímetre serà el de 19 cm. El perímetre del rectangle $ABCD$ és justament la suma dels perímetres de dos rectangles de la divisió que només tenen un vèrtex en comú i serà, llavors, $11 + 19 = 30$ cm.

25. D. 8 i 10.

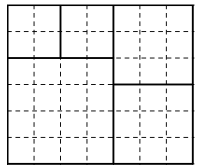
Si la diferència entre dos nombres veïns és sempre 1 o 2, aleshores l'1 i el 12 han d'estar situats diametralment oposats perquè han de tenir entre ells justament 6 intervals, cinc amb diferència de 2 i l'altre de 1. Per altra banda les diferències d'una unitat han de ser justament entre l'11 i el 12 i entre l'1 i el 2 perquè, altrament, a un costat hi hauria els nombres $a, a + 1$ i a l'altre costat hi hauria $a - 1, a + 2$, que es diferencien en 3 unitats i no tindríem cap nombre per posar entre ells. Es dedueix que, a part de girs i simetries, l'única solució és la de la figura adjunta.



26. B. 5.

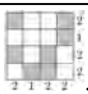
Tot i que $42 = 25 + 16 + 1$ i això podria fer pensar que en Pere pot retallar un quadrat de 5, un de 4 i un de 1, això no és factibe geomètricament.

Analitzant també la quadrícula de 6×7 es veu que si en Pere retalla un quadrat de 6×6 només podrà assolir el seu objectiu retallant, a més, 6 quadrats de 1×1; tindrà 7 quadrats. Semblantment si en retalla un de 5×5 en Pol veurà que com a mínim ha de retallar 9 quadrats.



La figura mostra que es pot retallar un quadrat de 4×4 i acabar amb dos quadrats de 3×3 i dos de 2×2, tot plegat 5 quadrats: $42 = 16 + 2 \times 9 + 2 \times 4$.

Si només es retallen quadrats de 3×3 o més petits veurem que, sigui com sigui, obtenim més de 5 quadrats.

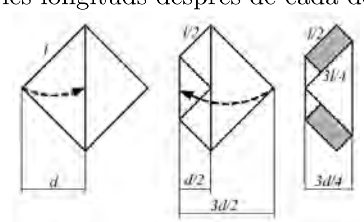
27. D. .

La figura mostra que l'opció D és factible.

L'opció A no pot ser: no pot tenir la primera fila les 4 caselles pintades i, en canvi, la primera columna cap casella pintada. L'opció B no pot ser: no coincideix la suma del nombre de caselles pintades per files o per columnes. La C no pot ser perquè no pot haver-hi dues files amb cap casella pintada i una columna amb tres. L'opció E tampoc no pot ser perquè quan acolorim tres caselles de la segona i de la tercera fila (deixant la primera columna en blanc) a la tercera columna hi haurà dues caselles pintades.

28. D. 16 cm^2.

Si indiquem amb l el costat i amb d la mitja diagonal del quadrat inicial, la figura següent mostra les longituds després de cada doblec.



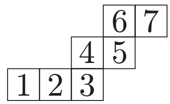
El costat gran del rectangle ombrejat és $\frac{l}{2}$ i, com que amb el doblec es formen triangles rectangles isòsceles es pot observar que el costat menut dels rectangles és $\frac{3l}{4} - \frac{l}{2} = \frac{l}{4}$. Com que el quadrat inicial té àrea 64 cm^2, és $l = 8$ cm, els costats dels rectangles són 4 cm i 2 cm, l'àrea de cada un és 4×2 cm^2 i l'àrea total demanada és de 16 cm^2.

29. C. 5.

La xifra c només pot ser un 4 a fi i efecte que $3c$ acabi en 2. En portarem una cap a la columna de les desenes.
La xifra b només pot ser un 5 perquè $2b+1$ acabi en 1. En portarem una cap a la columna de les centenes.
Com que ha de ser $a + 1 = 9$, podem veure (encara que no ho demanés el problema) que $a = 8$ i que l'única solució per a la suma demanada és $854 + 54 + 4 = 912$.

30. B. 1 i 6.

En passar de la posició 1 a la 3, la cara que inicialment és la inferior passa a ser la superior, en les posicions 4 i 5 passa a ser la que tenim oposada a la que veiem frontalment, i en la posició 6 torna a sota.



XVII Cangur SCM Nivell 1

Solucions (22 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

1. E. $(6+4)\cdot 7+9$.

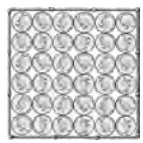
Que a 6 se li suma 4 s'escriu $6+4$. Quan multipliquem el resultat per 7 s'escriu $(6+4)\cdot 7$. I si a aquest resultat li sumem 9 s'escriu $(6+4)\cdot 7+9$.

2. C. 79.

Si anomenem x la quantitat de punts que ha fet aquest equip en el quart partit, i per tant, també en el tercer partit, podem escriure que $95+103+x+x=356$. Si resolem aquesta equació obtenim el valor de x.

3. B. 12.

Es tracta de veure que l'enunciat demana quants llumins es necessiten per construir el quadrat, és a dir, el perímetre que encercla les monedes. Si el quadrat ha de contenir 36 monedes serà un quadrat de 6×6 i, per tant cada costat haurà de ser triple del de la figura de l'enunciat.



4. E. 100.

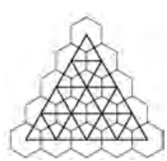
Després de sopar li queden $180-20=160$ per congelar o per assecar. Si anomenem x la quantitat de bolets que posa a assecar, en posa $x-40$ a congelar. Com que $x+x-40=160$ arribem a $x=100$.

5. A. Les 2 de la vesprada d'ahir.

Com que quan a Gandia són les 17 h a Perth ja són les 24 h, vol dir que la diferència horària és de 7 h. Per tant quan ahir eren les 21 hores a Perth, a Gandia eren 7 h més prompte; com que $21-7=14$, les 2 de la vesprada.

6. C. Vegeu la figura.

Es mostren els quinze hexàgons de l'enunciat i els segments que es demana construir.



7. D. 5.

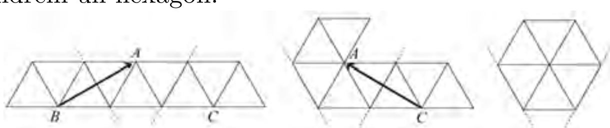
8 bombons són rodons i 6 quadrats. 7 bombons són de xocolata negra i 7 amb llet. Hi ha 2 bombons quadrats amb llet (”no són de xocolata negra” segons l’enunciat). Per tant els altres 5 bombons amb llet seran rodons.

8. E. 4 €.

Albert, Berta, Carles i Diana tenen, conjuntament, 11 €. Com que els dos xics junts tenen 7 €, les dues xiques en conjunt tenen 4 €.

9. C. Un hexàgon.

Si comencem doblegant per la línia de punts de l’esquerra, el punt B anirà a superposar-se a l’A. En el segon doblec el punt C anirà també a superposar-se a l’A i obtindrem un hexàgon.



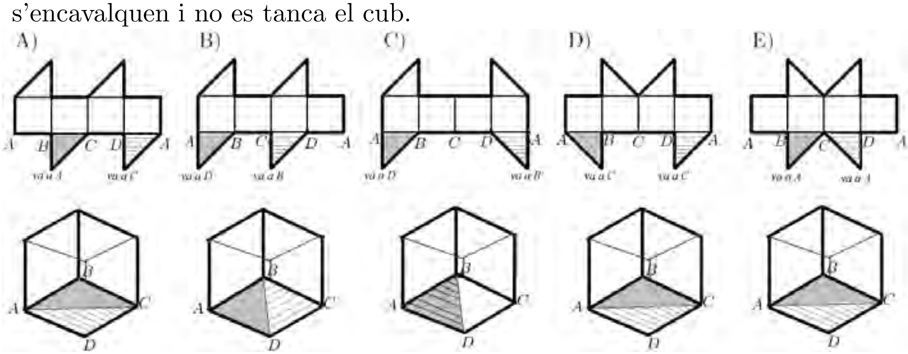
10. B. 13.

Entre tots dos han menjat 4 pomes i 5 peres i, doncs, els quedaran 16 peces de fruita que, segons l’enunciat, seran 8 pomes i 8 peres. El nombre de peres que havien agafat és $8 + 5 = 13$.

Qüestions de 4 punts

11. C. Vegeu les figures.

Quan es posen les quatre cares quadrades formant les ”parets laterals” d’un cub, els dos triangles superiors s’adossen correctament per formar un quadrat. Pel que fa a la cara inferior els dos triangles que es veuen a la figura C s’encavalquen i no es tanca el cub.

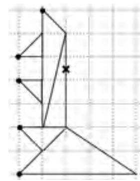


12. D. La lletra D.

El cub que no veiem té una cara amb comú amb els daus als quals pertanyen les tres cares ombrejades a la figura, una A, una B i una C. Per tant el dau que ens interessa ha de tenir una D.

13. B. 6.

La figura mostra que es pot fer amb 6 triangles. Amb menys no es pot fer perquè les cinc ”puntes” assenyalades amb un punt segur que són de triangles diferents i el segment marcat amb una aspa no pot pertànyer a cap triangle que tingui una de les ”puntes” anteriors com a vèrtex.



14. E. Verd.

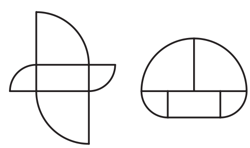
Observeu que tots els nombres de color roig són un múltiple de 4 més 1; els de color blau, un múltiple de 4 més 2, els de color gros un múltiple de 4 més 3 i els de color verd corresponen als múltiples de 4. Aleshores si sumem un nombre roig $(3k+1)$, amb un nombre groc $(3m+3)$, la suma serà un múltiple de 4 $(4(k+m+1))$, és a dir, de color verd.

15. A. 128 cm^2.

El perímetre de la figura és igual a 14 vegades el costat dels quadrats iguals que la formen. Per tant el costat de cada quadrat és de 4 cm i la seva àrea és 16 cm^2. Com que hi ha vuit quadrats, l'àrea de la figura és de 128 cm^2.

16. B. 17 cm.

El perímetre de la figura de la dreta té quatre quarts de cercle (dos grans i dos menuts) i un segment de 9 cm, i el de l'esquerra a més dels quatre quarts de cercle té dos segments de 9 cm i dos de 4 cm. La diferència de perímetres és doncs $9+4+4=17$ cm.



17. C. 4.

Tenim cinc segments amb tres xifres en cadascun d'ells. Com que el resultat de sumar les xifres de cada segment és el mateix, la suma d'aquests resultats és múltiple de 5. Ara observem que totes les xifres pertanyen a dos segments, excepte la del vèrtex superior que pertany a tres i, per tant, si anomenem a la xifra del vèrtex superior, com que $1+2+3+4+5+6+7=28$ la suma dels cinc segments és $2\times 28+a$, que només és múltiple de 5 si $a=4$.

18. E. 10 100.

Si les xifres del número donat sumen 5 o bé és el número 20 000 i llavors sumant-li un nombre de 2 xifres segur que la suma de les xifres del resultat donaria més de 2 o bé és un nombre que té dos 1 (un d'ells la primera xifra) i tres 0. Amb 11 000 i 10 100 passa com amb el 20 000. Aleshores perquè es compleixi la condició final hi ha dues alternatives, $10\,010 + 90 = 10\,100$ i $10\,001 + 90 = 10\,100$, que donen el mateix resultat indicat.

19. B. 3.

Tant se val el número de rodes que hi ha entre la primera i la darrera, quan la primera fa una volta sencera s'engranen 30 dents i com que la darrera en té 10 li caldrà fer 3 voltes senceres per completar les 30.

20. D. 8.

Si vull fer el mínim nombre d'accions caldrà que tregui quantes més vegades millor tres pedres del primer muntó i dues del segon, però de manera que, si així no he pogut acabar (com és el cas), després quedin el mateix nombre de pedres a cada muntó per poder-ne treure successivament una i una de cada muntó. Els nombres enters m i n més grans que poden fer que $7-3m = 10-2n$ són $m = 1$ i $n = 3$ i així, començo traient tres del primer muntó i tres vegades dues del segon muntó. En quedaran 4 en cada muntó. Per acabar trec quatre vegades una pedra de cada muntó. En total hauré fet $1 + 3 + 4 = 8$ accions.

Qüestions de 5 punts

21. A. 4 voltes.

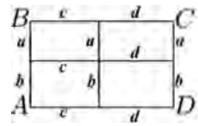
Si n és el nombre de voltes que ha fet en Lluís, la Maria n'haurà fet $n + \frac{1}{2}$. Com que hauran estat el mateix temps corrent, la relació entre els espais recorreguts és la mateixa que entre les respectives velocitats. Per tant ha de complir-se que $n + \frac{1}{2} = \frac{9}{8}n$ d'on se'n dedueix que $n = 4$.

22. D. 6.

Passa aquestes voltes davant la finestra: (1) Quan cau des dels 10 m; (2) quan rebota i puja fins a 8 m; (3) quan torna a caure; (4) quan rebota fins a 6,4 m; (5) quan torna a caure i (6) quan rebota fins a 5,28 m i torna a baixar, que és una sola aparició. Després rebota fins a 4,224 m, que queda per sota de la finestra i ja no es veurà més.

23. D. 60 cm.

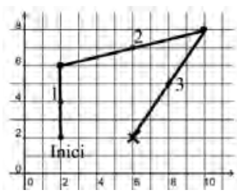
Si hem dividit el rectangle en quatre rectangles, com a la figura, es compleix que el rectangle de major perímetre i el de menor perímetre només tenen un vèrtex en comú.



Si suposem que el de menor perímetre és el de costats a i c, mirant el de costats a i d i el de costats b i c serà $2a + 2c \leq 2a + 2d$ i $2a + 2c \leq 2b + 2c$ i, per tant $c \leq d$ i $a \leq b$. A partir d'aquí es dedueix que $2a + 2d \leq 2b + 2d$ i $2b + 2c \leq 2b + 2d$ i, per tant, el rectangle de major perímetre és el que té costats b i d.
Aleshores, en el nostre problema, com que el rectangle del qual desconeixem el perímetre no és ni el menor ni el major, el de menor perímetre serà el de 21 cm i el de major perímetre serà el de 39 cm. El perímetre del rectangle $ABCD$ és justament la suma dels perímetres de dos rectangles de la divisió que només tenen un vèrtex en comú i serà, llavors, $21 + 39 = 60$ cm.

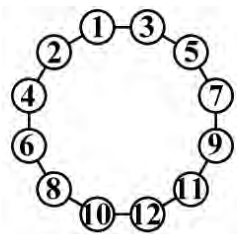
24. C. $(6, 2)$.

La figura mostra els punts on acabaran els tres salts de Hip: el primer en el punt $(2, 6)$, el segon en el punt $(10, 8)$ i acabarà en el punt $(6, 2)$.



25. A. 8 i 10.

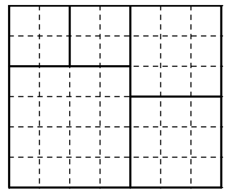
Si la diferència entre dos nombres veïns és sempre 1 o 2, aleshores l'1 i el 12 han d'estar situats diametralment oposats perquè han de tenir entre ells justament 6 intervals, cinc amb diferència de 2 i l'altre de 1. Per altra banda les diferències d'una unitat han de ser justament entre l'11 i el 12 i entre l'1 i el 2 perquè, altrament, a un costat hi hauria els nombres $a, a + 1$ i a l'altre costat hi hauria $a - 1, a + 2$, que es diferencien en 3 unitats i no tindríem cap nombre per posar entre ells. Es dedueix que, a part de girs i simetries, l'única solució és la de la figura adjunta.



26. D. 5.

Tot i que $42 = 25 + 16 + 1$ i això podria fer pensar que en Pere pot retallar un quadrat de 5, un de 4 i un de 1, això no és factibe geomètricament.
Analitzant també la quadrícula de 6×7 es veu que si en Pere retalla un quadrat de 6×6 només podrà assolir el seu objectiu retallant, a més, 6 quadrats de 1×1; tindrà 7 quadrats.
Semblantment si en retalla un de 5×5 en Pol veurà que com a mínim ha de retallar 9 quadrats.

La figura mostra que es pot retallar un quadrat de 4×4 i acabar amb dos quadrats de 3×3 i dos de 2×2, tot plegat 5 quadrats: $42 = 16 + 2 \times 9 + 2 \times 4$.
Si només es retallen quadrats de 3×3 o més petits veurem que, sigui com sigui, obtenim més de 5 quadrats.

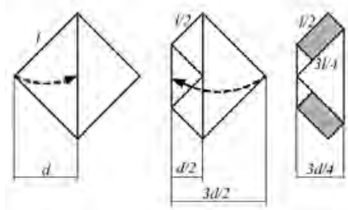


27. C. 5.

La xifra c només pot ser un 4 a fi i efecte que $3c$ acabi en 2. En portarem una cap a la columna de les desenes. La xifra b només pot ser un 5 perquè $2b + 1$ acabi en 1. En portarem una cap a la columna de les centenes. Com que ha de ser $a + 1 = 9$, podem veure (encara que no ho demanés el problema) que $a = 8$ i que l'única solució per a la suma demanada és $854 + 54 + 4 = 912$.

28. D. 16 cm^2.

Si indiquem amb l el costat i amb d la mitja diagonal del quadrat inicial, la figura següent mostra les longituds després de cada doblec.



El costat gran del rectangle ombrejat és $\dfrac{l}{2}$ i, com que amb el doblec es formen triangles rectangles isòsceles es pot observar que el costat menut dels rectangles és $\dfrac{3l}{4} - \dfrac{l}{2} = \dfrac{l}{4}$. Com que el quadrat inicial té àrea 64 cm^2, és $l = 8$ cm, els costats dels rectangles són 4 cm i 2 cm, l'àrea de cada un és 4×2 cm^2 i l'àrea total demanada és de 16 cm^2.

29. C. 12.

Hi ha tres maneres de col·locar, seguint l'enunciat, les medalles d'or (O) i les que no són d'or (N), a saber $OONN$, $NOON$ i $NNOO$. En cada una d'aquestes disposicions podem posar en dos ordres les dues medalles d'or i també en dos ordres les dues medalles de plata i de bronze. El nombre total d'ordenacions és $3 \times 2 \times 2 = 12$.

30. B. 247.

Si volem que la diferència sigui la més menuda possible les unitats de miler d'un i de l'altre nombre hauran de ser com més paregudes millor. I en canvi les centenes del nombre major convindrà que siguen les més menudes possible i les del nombre menor ben grans. I després el mateix amb les desenes i finalment amb les unitats. Dit, això només cal considerar els números 5123 i 4876. La seva diferència és $5123 - 4876 = 247$.

XVII Cangur SCM Nivell 2

Enunciats (15 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

1. Quatre rajoles de xocolata costen 6 € més que només una rajola de xocolata. Quant costa cada rajola?

A) 1 € B) 2 € C) 3 € D) 4 € E) 5 €

2. L'Andreu juga amb la calculadora i escriu 11,11 – 1,111. Quin resultat apareixerà a la calculadora?

A) 9,999 B) 9,99 C) 9,009 D) 9,0909 E) 10

3. Un rellotge és a sobre d'una taula de cara enlaire, i la busca minutera assenyala el nord-est. Quants minuts han de passar fins que aquesta busca assenyali el nord-oest per primera vegada?

A) 45 minuts B) 40 minuts C) 30 minuts D) 20 minuts E) 15 minuts

4. La Mireia té unes tisores i cinc lletres de cartolina. Talla cada una de les lletres només una vegada seguint una línia recta, per tal d'obtenir tants trossos com sigui possible. Amb quina lletra obté el màxim nombre de trossos?

A) O B) F C) S D) H E) M

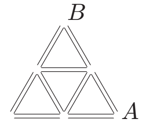
5. Un drac té 5 caps. Cada vegada que se li talla un cap, li'n creixen cinc de nous. Si tallem, d'un en un, sis caps del drac, quants caps acabarà tenint?

A) 25 B) 28 C) 29 D) 30 E) 35

6. En quina de les expressions següents podem reemplaçar cada aparició del nombre 8 per un altre nombre positiu, diferent del 8, sense que en canviï el resultat?

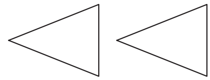
A) $(8+8):8+8$ B) $8\cdot(8+8):8$ C) $8+8-8+8$
D) $(8+8-8)\cdot 8$ E) $(8+8-8):8$

7. El dibuix representa un parc i cada un dels 9 camins que hi veieu fa 100 m de llarg. L'Anna vol anar des de A fins a B sense passar més d'un cop per un mateix camí. Quant fa el camí més llarg que pot triar?



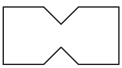
A) 900 m B) 800 m C) 700 m D) 600 m E) 400 m

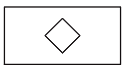
8. Aquí teniu dos triangles. De quantes maneres podeu triar dos vèrtexs, un de cada triangle, de manera que la recta que els uneixi no talli cap dels triangles?

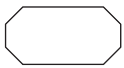


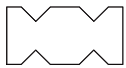
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Més de 4

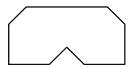
9. L'Andreu doblega un full de paper, tal com mostra la figura, i amb unes tisores hi fa dos talls rectilinis. Després, desplega el full de paper. Quina de les figures següents no es pot obtenir com a resultat?

A) 

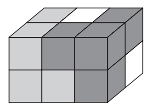
B) 

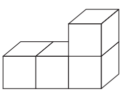
C) 

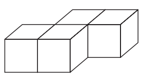
D) 

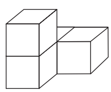
E) 

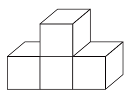
10. Un ortoedre està fet amb tres peces, tal com indica el dibuix. Cada peça està formada per 4 cubs, tots del mateix color. Quina de les peces següents correspon a la peça blanca?

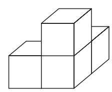


A) 

B) 

C) 

D) 

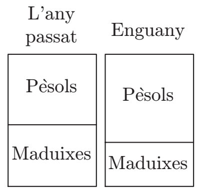
E) 

Qüestions de 4 punts

11. Utilitzant totes les xifres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8 només una vegada, formem dos nombres de quatre xifres que la seva suma és la menor possible. Quin és el valor d'aquesta suma possible?

A) 3825 B) 3333 C) 2468 D) 6912 E) 4734

12. La senyora Jardí té sembrats pèsols i maduixes en un terreny. Enguany ha canviat la part dels pèsols de rectangular a quadrada allargant 3 metres un dels seus costats. En conseqüència, la part de les maduixes ha esdevingut 15 m^2 més petita. Quina era l'àrea de la part dels pèsols l'any passat?



A) 5 m^2 B) 9 m^2 C) 10 m^2 D) 15 m^2 E) 18 m^2

---

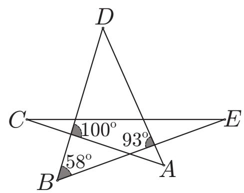
13. Na Bàrbara vol completar el següent diagrama mitjançant la inserció de tres nombres, un a cada cel·la buida. Si vol que la suma dels tres primers nombres sigui 100, la suma dels tres del mig sigui 200 i la suma dels tres últims nombres sigui 300, quin nombre ha d'inserir na Bàrbara en el centre del diagrama?

10				130

A) 50 B) 60 C) 70 D) 75 E) 100

---

14. La figura mostra un pentàgon estrellat, amb la situació de tres angles de 58°, 93° i 100°. Quin és el valor de l'angle del vèrtex A?



A) 51° B) 65° C) 109° D) 42° E) 35°

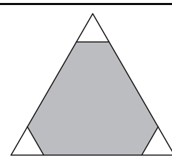
---

15. A cadascuna de quatre targetes hi ha escrits un dels nombres 2, 5, 7 i 12 en una de les seves cares. A l'altra cada hi ha escrit un dels textos «divisible per 7», «primer», «senar», «més gran que 100». Se sap que el nombre escrit en una cara de la targeta *no es correspon* amb el text de l'altra cara. Quin nombre hi ha escrit a la targeta amb la frase «més gran que 100»?

A) 2 B) 5 C) 7 D) 12 E) No es pot saber.

---

16. Tenim un triangle equilàter de 6 cm de costat, del qual, en els seus vèrtexs, tallem tres triangles equilàters de la mateixa mida. La suma dels perímetres dels tres triangles tallats és igual al perímetre de l'hexàgon que en resulta (ombrejat gris a la figura). Quina és la longitud de cada costat dels triangles petits?



A) 1 cm B) 1,2 cm C) 1,25 cm D) 1,5 cm E) 2 cm

17. Hem tallat un formatge a trossos. Els ratolins roben trossos durant tot el dia. El moix mandrós Nico s'adona que cada ratolí roba un nombre diferent de trossos inferior a 10 i que cap ratolí roba exactament el doble de trossos que els altres ratolins. Com a màxim, quants ratolins pot haver observat en Nico?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

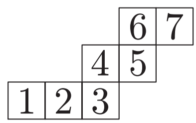
18. A l'aeroport hi ha una cinta transportadora de 500 m de longitud que es mou a una velocitat de 4 km/h. N'Aina i n'Oriol pugen junts a la cinta transportadora. N'Aina camina sobre la cinta a una velocitat de 6 km/h i n'Oriol es queda quiet. A quina distància es troba n'Aina de n'Oriol quan ella surt de la cinta?

A) 100 m B) 160 m C) 200 m D) 250 m E) 300 m

19. El costat original d'un quadrat que parla era de 8 cm. Si el quadrat diu la veritat, el seu costat es fa 2 cm més curt. Si menteix, el seu perímetre es duplica. De les quatre frases que ha dit, dues són vertaderes i dues falses, però no sabem quin és l'ordre. Quin és el màxim perímetre possible del quadrat després de les quatre frases?

A) 28 cm B) 80 cm C) 88 cm D) 112 cm E) 120 cm

20. Un cub rodola pas a pas en el pla tot girant sobre les arestes. La cara inferior passa per les posicions 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7, en aquest ordre. En quines dues d'aquestes posicions la cara inferior del cub és la mateixa?



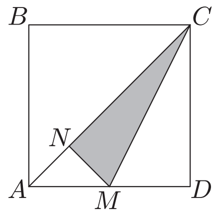
A) 1 i 7 B) 1 i 6 C) 1 i 5 D) 2 i 7 E) 2 i 6

Qüestions de 5 punts

21. En Ricard té 5 cubs. Quan els ordena de més petit a més gran, la diferència d'altures de dos cubs veïns és de 2 cm. L'altura del cub més gran coincideix amb la de la torre formada pels dos cubs més petits. Quina és l'altura de la torre formada pels cinc cubs?

A) 6 cm B) 14 cm C) 22 cm D) 44 cm E) 50 cm

22. Calculeu la raó entre l'àrea de la regió gris (triangle MNC) i l'àrea del quadrat $ABCD$, si M és el punt mitjà de AD i MN és perpendicular a AC.



A) 1:6 B) 1:5 C) 7:36 D) 7:40 E) 3:16

23. El tango es balla per parelles, un home i una dona. En una festa no hi ha més de 50 persones. En un cert moment, 3/4 dels homes ballen amb 4/5 de les dones. Quantes persones ballen en aquell moment?

A) 20 B) 24 C) 30 D) 32 E) 46

24. En David vol col·locar els dotze nombres de l'1 al 12 en una circumferència, de manera que la diferència entre dos nombres veïns sigui 2 o 3. Quins dels nombres següents han de ser veïns?

A) 5 i 8 B) 3 i 5 C) 7 i 9 D) 6 i 8 E) 4 i 6

25. Hi ha alguns nombres de tres xifres amb la propietat següent: si els traiem la primera xifra obtenim un quadrat perfecte, i si els traiem la darrera xifra també obtenim un quadrat perfecte. Quant sumen tots els nombres que tenen aquesta curiosa propietat?

A) 1013 B) 1177 C) 1465 D) 1993 E) 2016

26. Un llibre conté 30 relats. Les llargades dels relats són diferents: 1, 2, 3, ..., 30 pàgines, no necessàriament en aquest ordre. Cada relat comença en una pàgina nova. El primer relat comença a la pàgina número 1. Com a màxim, quants relats poden començar en pàgines senars?

A) 15 B) 18 C) 20 D) 21 E) 23

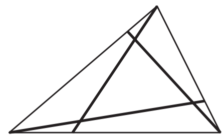
27. Fem rotacions d'un triangle equilàter al voltant del seu centre, primer de 3°, després, a partir de la posició obtinguda, de 9°, després de 27° més, i successivament, en el pas n es fa una rotació de $(3^n)^\circ$, sempre a partir de la posició anterior. Quantes posicions diferents, tot comptant la posició inicial, es poden aconseguir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 360

28. Una corda es plega per la meitat, a continuació es torna a plegar per la meitat, i encara es torna a plegar una altra vegada, també per la meitat. Després s'hi fa un tall i en resulten diferents fragments. Dos d'aquests trossos tenen una llargada de 9 m i de 4 m. Quin dels valors següents no pot ser la longitud de la corda sencera?

A) 52 B) 68 C) 72 D) 88 E) Totes les respostes són possibles.

29. Tres segments divideixen un triangle en quatre triangles més petits i tres quadrilàters. La suma dels perímetres dels tres quadrilàters és igual a 25 cm. La suma dels perímetres dels quatre triangles petits és 20 cm. El perímetre del triangle inicial és de 19 cm. Quant és la suma de les longituds dels segments?



A) 13 cm B) 12 cm C) 15 cm D) 11 cm E) 16 cm

30. Una graella 3×3 s'omple amb nombres positius, de manera que el producte dels nombres de cada fila i de cada columna és 1, i el producte dels quatre nombres de qualsevol graella 2×2 és 2. Quin és el nombre que hi haurà a la casella central de la graella?

A) 16 B) 8 C) 4 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

XVII Cangur SCM Nivell 2

Enunciats (22 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

1. La senyora Teresa va dur 150 kg de taronges al mercat. Va pagar 90 € pel lloguer de la parada i va obtenir un benefici net de la venda de les taronges de 120 €. A quin preu venia el quilo de taronges?

A) 0,20 € B) 0,80 € C) 1,25 € D) 1,40 € E) 1,75 €

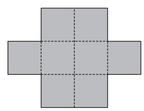
2. Andreu juga amb la calculadora i hi escriu això: $20{,}12 - 2{,}012$. Quin resultat obté?

A) 17,892 B) 18,118 C) 18 D) 18,008 E) 18,108

3. Un rellotge està situat cap a dalt en una taula, de manera que el minuter assenyala el sud-est. Quants minuts passen fins que el minuter assenyala el nord-oest per primera vegada?

A) 45 minuts B) 40 minuts C) 30 minuts D) 20 minuts E) 15 minuts

4. El perímetre exterior de la figura, construïda amb quadrats iguals, és de 56 cm. Quina és l'àrea de la figura?



A) 128 cm^2 B) 72 cm^2 C) 48 cm^2 D) 24 cm^2 E) 16 cm^2

5. Les mateixes figures representen els mateixos dígits. Les figures diferents, dígits diferents. Tots els dígits són més grans que 1. Quants dígits diferents poden representar els triangles per a obtenir un producte correcte?

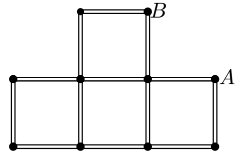
$$\triangle \times \triangle = \square \times \bigcirc$$

A) Cap B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6. En quina de les expressions següents podem reemplaçar cada aparició del número 9 per un altre número positiu (diferent del 9) sense que en canvïe el resultat?

A) $(9 + 9 - 9) \cdot 9$ B) $9 \cdot (9 + 9) : 9$ C) $9 + 9 - 9 + 9$
D) $(9 + 9 - 9) : 9$ E) $(9 + 9) : 9 + 9$

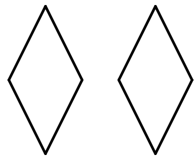
7. El dibuix representa un parc i cadascun dels tretze camins que hi veieu té 100 m de longitud. Aitana vol anar des d'A fins a B sense agafar cap camí més d'una vegada. Quina és la longitud del trajecte més llarg que pot triar?



A) 1.300 m B) 1.200 m C) 1.100 m D) 1.000 m E) 900 m

---

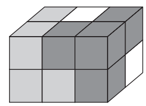
8. Ací teniu dos rombes. De quantes maneres es poden triar dos vèrtexs, un de cada rombe, talment la recta que passa per aquests dos vèrtexs no creue cap dels rombes?

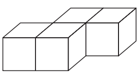
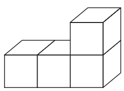
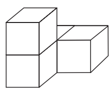
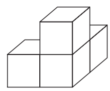
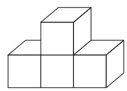


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Més de 4

---

9. Un ortoedre està fet amb tres peces, tal com indica el dibuix. Cada peça està formada per 4 cubs, tots del mateix color. Quina de les peces següents correspon a la peça blanca?



A)

B)

C)

D)

E)


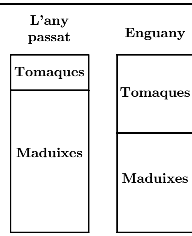
---

10. Cada dia d'entrenament, cinc atletes, Ariadna, Berta, Caterina, Diana i Elena, caminen en fila cap a l'estadi exactament en l'ordre descrit. De camí al canviador, situat al final d'un llarg corredor, hi ha vuit portes. Cada porta és oberta per la primera de la fila, que en obrir-la passa a ocupar el darrer lloc de la fila, després que hagen passat les altres. Qui obre la darrera porta?

A) Ariadna B) Berta C) Caterina D) Diana E) Elena

Qüestions de 4 punts

11. Mariola conrea tomaques i maduixes. Enguany ha canviat el repartiment del terreny d'esta manera: ha canviat la zona rectangular destinada a les tomaques per una zona quadrada allargant 5 metres un dels costats. Després de fer açò, l'àrea de la zona de maduixes ha minvat 50 m^2. Quina era l'àrea de la zona de les tomaques abans del canvi?



A) 10 m^2 B) 20 m^2 C) 40 m^2 D) 50 m^2 E) 100 m^2

12. Utilitzant totes les xifres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8 només una vegada, formem dos nombres naturals de quatre xifres, talment que la seua suma siga la menor possible. Quin és el valor d'aquesta menor suma possible?

A) 2.468 B) 3.333 C) 3.825 D) 4.734 E) 6.912

---

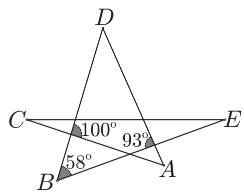
13. Bàrbara vol completar el diagrama següent mitjançant la inserció de tres nombres, un en cada cel·la buida. Si vol que la suma dels tres primers nombres siga 200, la suma dels tres del mig siga 400 i la suma dels tres últims nombres siga 600, quin nombre ha d'inserir Bàrbara en el centre del diagrama?

40				260

A) 250 B) 200 C) 150 D) 100 E) 50

---

14. La figura mostra un pentàgon estrellat. Quin és el valor de l'angle del vèrtex A?



A) 35° B) 42° C) 51° D) 65° E) 109°

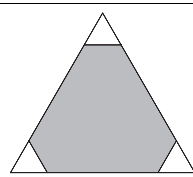
---

15. S'han escrit els nombres 2, 7, 11 i 22 en un costat de quatre targetes (un nombre en cada targeta), i en l'altre costat hi ha escrits els textos «divisible per 7», «primer», «senar», «més gran que 100» (cada un en una targeta diferent). Se sap que el nombre escrit en la targeta **no es correspon** amb el text de la part del darrere. Quin nombre hi ha escrit en la targeta amb la frase «divisible per 7»?

A) 22 B) 11 C) 7 D) 2 E) No es pot saber

---

16. Es tallen tres triangles equilàters de la mateixa grandària de les puntes d'un triangle equilàter més gran de 10 cm de costat. Els tres trianglets junts tenen el mateix perímetre que l'hexàgon gris restant. Quina és la longitud de cada costat dels triangles menuts?



A) 1 cm B) 2,5 cm C) 3,5 cm D) 1,5 cm E) 3 cm

17. Jordi va fer un pastís en forma de rectangle. Llavors hi va fer set talls, talment cada tall era paral·lel a un costat del pastís. En quantes peces no va poder tallar el pastís?

A) En 8 B) En 12 C) En 14 D) En 18 E) En 20

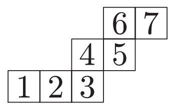
18. Sònia ha trobat una vareta de 48 dm en el garatge i vol retallar d'esta vareta tots els trossos necessaris per a construir totes les arestes d'un cub, sense perdre ni un sol mil·límetre de filferro. Quin serà el volum en dm^3 del cub de Sònia?

A) 64 B) 144 C) 48 D) 86 E) 16

19. Eugènia menteix dilluns, dimecres i dijous i diu la veritat els altres dies. Ausàs menteix dijous, divendres i diumenges i diu la veritat la resta de dies. Un dia Eugènia diu: «Avui és dilluns», i Ausiàs ho confirma «Sí, és veritat». Quin dia és?

A) Diumenge B) Dilluns C) Dimecres D) Dijous E) Un altre dia

20. Un cub rodola pas a pas en el pla tot girant sobre les arestes. La cara inferior passa per les posicions 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7 (en aquest ordre). En quines d'aquestes dues posicions la cara inferior del cub és la mateixa?



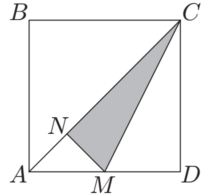
A) 1 i 7 B) 1 i 6 C) 1 i 5 D) 2 i 7 E) 2 i 6

Qüestions de 5 punts

21. Arnau té cinc cubs. Quan els ordena de menor a major, dos cubs consecutius sempre difereixen en altura en 3 cm. El cub més gros és tan alt com una torre muntada amb els tres més petits. Quina alçada té la torre construïda amb els cinc cubs?

A) 37,5 cm B) 35 cm C) 32,5 cm D) 27,5 cm E) 20 cm

22. Trobeu la raó entre l'àrea de la regió grisa (triangle MNC) i l'àrea del quadrat $ABCD$, si M és el punt mitjà de AD i MN és perpendicular a AC.

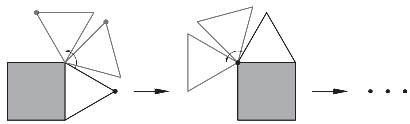


A) 1:6 B) 1:5 C) 7:36 D) 3:16 E) 7:40

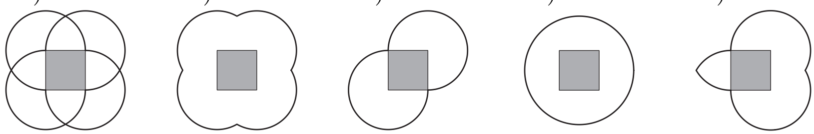
23. Hi ha 16 cangurs en una filera. Alguns són veraços i diuen sempre la veritat i els altres són mentiders i sempre menteixen. Cadascun d'ells diu: «A la meua esquerra el nombre de cangurs veraços és més petit que el de mentiders a la dreta». Quants cangurs d'aquesta filera diuen la veritat?

A) Cap B) 1 C) 7 D) 8 E) 16

24. Un triangle equilàter gira al voltant d'un quadrat (vegeu la figura). Quina forma té la figura que descriu el punt marcat fins que el triangle arriba a la seua posició inicial per primera vegada?



A) B) C) D) E)



25. Hi ha uns quants nombres de tres xifres amb la propietat següent: si els traiem la primera xifra obtenim un quadrat perfecte, i si els traiem la darrera xifra també obtenim un quadrat perfecte. Quant sumen tots els nombres que tenen aquesta curiosa propietat?

A) 2.016 B) 1.993 C) 1.465 D) 1.177 E) 1.013

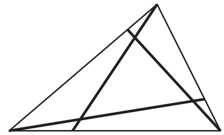
26. Hi ha nou ciutats al País de les Meravelles. Cada dues ciutats estan connectades per una carretera, o bé visible o bé invisible. En el mapa del País de les Meravelles, només hi ha onze carreteres visibles. Alícia té unes ulleres màgiques: quan mira el mapa amb aquestes ulleres només veu les carreteres que són invisibles de qualsevol altra manera. Quantes carreteres invisibles pot veure?

A) 70 B) 61 C) 25 D) 16 E) 38

27. Fem rotacions d'un triangle equilàter al voltant del seu centre, primer de 3°; després, a partir de la posició obtinguda, de 9°; després, de 27° més, i successivament, en el pas n es fa una rotació de $(3^n)°$, sempre a partir de la posició anterior. Quantes posicions diferents, tot comptant la posició inicial, es poden aconseguir?

A) 360 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

28. Tres segments divideixen un triangle en quatre triangles més petits i tres quadrilàters, com en la figura. La suma dels perímetres dels tres quadrilàters és igual a 25 cm. La suma dels perímetres dels quatre triangles petits és 20 cm. El perímetre del triangle inicial és de 19 cm. Quant sumen de les longituds dels segments?



A) 11 cm B) 12 cm C) 13 cm D) 15 cm E) 16 cm

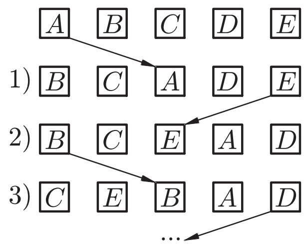
---

29. Una graella 3×3 s'omple amb nombres positius, de manera que el producte dels nombres de cada fila i de cada columna és 1, i el producte dels quatre nombres de qualsevol graella 2×2 és 2. Quin és el nombre que hi ha en la casella central de la graella?

A) 4 B) $\frac{1}{4}$ C) 8 D) $\frac{1}{8}$ E) 16

---

30. Al principi les cartes A, B, C, D, E estan col·locades en aquest ordre d'esquerra a dreta. En un primer pas la carta de l'esquerra se situa al mig; en un segon pas, la carta de la dreta se situa al mig, i així successivament. Quina carta és a l'esquerra del tot en el pas 2012?



A) A B) B C) C D) D E) E

Premis. País Valencià

Primer premi

Alberto Núñez Delgado
(Madre Vedruna Sagrado Corazón, Castelló de la Plana), 132.5 punts

Segons premis, ex aequo

Damià Torres Latorre (IES Guadassuar, Guadassuar) i
Javier Platero Puig (IES Veles e Vents, Torrent), 126.25 punts

Altres premis

Eric Ferrer Escuin (IES Els Ports, Morella), 116.25 punts
ex aequo, Carlos Salom García i Paula Lluch Solsona
(IES Miquel Peris i Segarra, Castelló de la Plana-Grau), 113.75 punts
Oriol Ruiz Catalán (IES 25 d'Abril, Alfafar), 113.5 punts
Nacor Altabás Llorach (IES Llombai, Borriana), 113.25 punts
Angel Navarro Martínez (IES La Creueta, Onil), 112 punts
Jorge Luján Mora (Sagrado Corazón, Quart de Poblet), 106 punts

Premis. Balears

Primer premi

Miquel Serra Perelló (IES Santanyí, Santanyí), 112,5 punts

Segon premi

Mario Balbuena Azcona (Col·legi Mestral, Eivissa), 111,25 punts

Tercer premi

Pere Riera Martínez (Col·legi CIDE, Palma), 108,5 punts

Altres premis

Nicolau Conti Gost (IES Santa Margalida, Santa Margalida), 107 punts
Tomeu Llopis Vidal (IES Son Pacs, Palma), 106,25 punts
Álvaro Malo García (La Salle, Maó), 104,75 punts
Xavier Rebasa Moll (IES Guillem Cifre de Colonya, Pollença), 102,25 punts
Aina Forteza Gómez (IES Joan Alcover, Palma), 101,75 punts
Julià Ballester Simón (Col·legi Sagrat Cor, Palma), 101,25 punts
Nicolás Ferrer Forteza-Rey (Col·legi Sagrat Cor, Palma), 101 punts

Premis i mencions. Catalunya i Andorra

Primer premi
Pau Mir García (Institut de Sant Quirze del Vallès), 133,75 punts

Premis per al pòdium
Joel Suñé Margineda (Institut Menéndez y Pelayo, Barcelona), 132,5 punts
Álvaro Moreno Abajo (Institut Ausiàs March, Barcelona), 130 punts

Premis de categoria A
ex aequo, Rafael Ávila Parra (Aula Escuela Europea, Barcelona) i
Laura Roigé Foix (CEPA Oriol Martorell, Barcelona), 128,75 punts
Josep Maria Gallegos Saliner (Institut Ramon Muntaner, Figueres), 127,5 punts

Premis de categoria B
Carles Domingo Enrich (El Cim, Vilanova i la Geltrú), 126,25 punts
Aleix Lascorz Guiu (Institut Lluís Domènech i Montaner, Reus), 126 punts
Robert Pérez García (Institut Pompeu Fabra, Martorell), 125 punts

Premis de categoria C
Inés Franch López (Aula Escuela Europea, Barcelona), 123,75 punts
Santiago Arxé Carbona (Aula Escuela Europea, Barcelona), 122,5 punts
ex aequo, Xavier Colet Guitert (Casp-Sagrat Cor de Jesús, Barcelona) i
Gerard Orriols Gimènez (Institut Thalassa, Montgat), 121,25 punts

Premis de categoria D
ex aequo, Oriol Herrero Molina (Thau, Sant Cugat del Vallès) i
Gerard Valls Ferrer (Aula Escuela Europea, Barcelona), 120 punts
Roger Serra Castilla (Anoia, Igualada), 118,75 punts

Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions

Ignasi Vélez Cerón (Immaculada, Barcelona), 118,25 punts
Luis Arroyes Morón (Institut Montserrat Roig, Sant Andreu de la Barca) i
Àlex Guerrero Almirall (Escola Pia Balmes, Barcelona), 117,5 punts
Carlota Corbella Alcántara (Avenç, Sant Cugat del Vallès) i
Unai Sánchez Yaniz (Institut Menéndez y Pelayo, Barcelona), 116,25 punts
Laia Marín Gual (Tecnos, Terrassa) i
Marina Tarrida Canals (Institut La Sedeta, Barcelona), 116 punts
Eloi Soldevila Dalmau (Escorial, Vic), 115,75 punts
Francesc Viaplana Rozman (Infant Jesús, Barcelona), 115 punts
Alba Alcañiz Moya (Asunción de Nuestra Señora, Barcelona), 114,75 punts
Blanca Puche Perna (Institut Vall d'Arús, Vallirana), 114,25 punts
David Abbad Gómez (Jardí, Granollers) i
Eloi Matés Fernández (Institut La Bisbal, La Bisbal d'Empordà), 113,75 punts
José Andrés Ballester Huesca (Institut d'Altafulla, Altafulla) i
Nil Garcés de Marcilla
(Institut Antoni de Martí i Franquès, Tarragona), 112,5 punts
Juan Carlos Moreno Moreno (Institut de Pineda de Mar, Pineda de Mar) i
Aleix Rué Vilà (Puigcerver, Reus), 112 punts
Joan Aguayo Planell (Institut La Llauna, Badalona),
Iris Balcázar Castell (Fundación Escuela Suiza, Barcelona) i
Pau Mateu Yus (Avenç, Sant Cugat del Vallès), 111,25 punts
Miquel Vilalta Clapés (Escola Pia de Sabadell, Sabadell), 111 punts
Antonio Domingo Oriol (Thau, Barcelona),
Qijun Jin (Sil, Barcelona) i
Pol Zanuy Lafarga (Institut Secretari Coloma, Barcelona), 110 punts
Pol Febrer Calabozo (Institut Francisco de Goya, Barcelona), 109,75 punts
Nicolàs Ordax Sommer (Institut Menéndez y Pelayo, Barcelona),
Maximilià-Manuel Serra Lasierra
(Institut La Vall de Tenes, Santa Eulàlia de Ronçana),
Mateusz Sobieraj Grzegorz (Institut Sòl de Riu, Alcanar) i
Julia Uriach Dasca (Sagrat Cor-Sarrià, Barcelona), 108,75 punts
Xavier Arasa Aguirre, (Teresià, Tortosa),
Alex Armengou Fages (Sant Ignasi, Barcelona),
José Manuel Borrego Burón (Aula Escuela Europea, Barcelona),
Oriol Bosch Pont (Institut Miquel Bosch i Jover, Artés),
Anna Jané Font (Sant Nicolau, Sabadell) i
Joan Solà Porta (Institut Manuel Blancafort, La Garriga), 108,5 punts
Maria Armengol Díaz (El Cim, Vilanova i la Geltrú), 107,5 punts

Nils Pachler De la Osa (Mare de Déu de les Escoles Pies, Barcelona),
Guillem Ródenas Alesina (Institut Salvador Espriu, Barcelona) i
Miquel Villalba Castells
(Institut Alt Penedès, Vilafranca del Penedès), 107,25 punts
Àlex Bel González (Institut Gorgs, Cerdanyola del Vallès) i
Jan Valls Trepat (Institut de Sant Quirze del Vallès), 107 punts
Adrià Marly Pèlach (Bell-lloc del Pla, Girona),
Bernat Molero Agudo (El Clot, Barcelona),
Ivan Parrot Martínez (Institut Manuel Carrasco i Formiguera, Barcelona),
Clàudia Serrano Colomé (Institut Lluís Domènech i Montaner, Canet de Mar),
Mireia Tolosa Simeon (Sadako, Barcelona) i
David Vila Liarte (Institut Samuel Gili i Gaya, Lleida), 106,25 punts

XVII Cangur SCM Nivell 2

Solucions (15 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

1. B. 2.

Quatre rajoles són tres rajoles més que una rajola, per tant els 6 € de més corresponen a les tres rajoles de més, és a dir 2 € cada rajola.

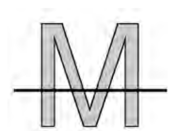
2. A. 9,999.

Només cal fer amb cura la resta 11,11 − 1,111, començant amb l'obervació que la xifra dels mil·lèsims ha de ser un 9.

3. A. 45 minuts.

Si assenyala el nord-est, vol dir que passa 45° del nord. Per assenyalar el nord-oest cal que li faltin 45° per al nord. Per tant ha de fer una volta completa menys 90°, és a dir, tres quarts de volta, que són 45 minuts.

4. E. La M.



La figura mostra que podem tallar la M de manera que hi hagi 4 talls i així obtenim 5 trossos.
Per les altres figures veiem que en tallar la O sempre que tallem de costat a costat s'obtenen dos trossos. Per a la S obtindrem com a màxim 4 trossos, per exemple amb un tall vertical que passi pel centre de simetria.

Fent un tall a la F i a la H se'n poden obtenir com a màxim quatre trossos perquè estan formades per tres segments dos dels quals són paral·lels; per tant una recta hi tindrà com a màxim tres punts de tall i, com que es tracta de figures no tancades, obtindrem quatre trossos.

5. C. 29.

Si li tallem un cap i n'hi creixen cinc, vol dir que cada vegada en guanya 4. Si fem el procés sis vegades, n'haurà guanyat 24 i per tant en tindrà 29.

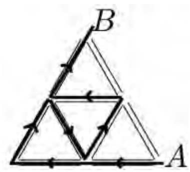
6. E. $(8+8-8):8$.

Si passem al llenguatge algebraic i substituïm el 8 per x, tindrem que l'opció A dóna $(x+x):x+x = 2+x$, la B i la C donen $x\cdot(x+x):x = x+x-x+x = 2x$, la D dóna $(x+x-x)\cdot x = x^2$ i la E dóna $(x+x-x):x = 1$ que és, doncs, l'únic resultat que no depèn del valor de x.

---

7. C. 700 m.

A la figura de la dreta es mostra un camí de longitud 700 m.



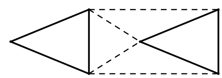
Aquesta és la màxima longitud possible perquè:

- en el triangle que té un vèrtex en el punt A no es pot passar pels tres costats sense haver de passar una altra vegada per un dels camins ja recorreguts.
- en el triangle que té com un dels vèrtexs el punt B forçosament arribarem a B abans d'haver recorregut tots tres costats del triangle.

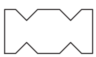
---

8. D. 4.

Des del vèrtex més allunyat del triangle de l'esquerra no podem fer cap recta que s'uneixi a un vèrtex del de la dreta sense tallar el triangle. Des dels altres en podem fer dues en cada cas.

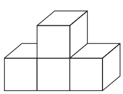


---

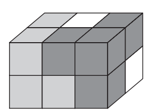
9. D.  .

Si imaginem doblegades les figures veiem fàcilment que en la D cal fer quatre talls per obtenir el dibuix mostrat i, en canvi, en les altres quatre sí que ho podem fer amb dos talls.

---

10. D.  .

La figura ens fa veure que els tres cubs del darrere que estan a baix són tots blancs, i el del mig de dalt també.

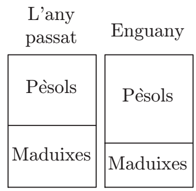


Qüestions de 4 punts

11. A. 3 825.

Per tal que la suma sigui la menor possible cal que les desenes de miler siguin els dos nombres menors possibles (1 i 2) i, seguint el mateix raonament per a les altres posicions, així arribarem a la solució: $1\,357 + 2\,468 = 3\,825$.

12. C. 10 m^2.



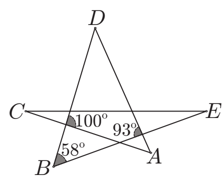
Si l'àrea de les maduixes s'ha reduït en 15 m^2 vol dir que la zona dels pèsols ha augmentat aquest valor. Com que un dels costats (l'alçada segons el dibuix) s'ha allargat 3 m, això vol dir que l'altre costat (l'amplada) fa 5 m ($3 \times 5 = 15$). En conseqüència el quadrat actual dels pèsols fa 5×5. Com que l'alçada ha augmentat 3 metres respecte l'any passat, vol dir que feia 2 m. Per tant l'àrea de pèsols de l'any passat feia 5 m $\times$ 2 m = 10 m^2.

13. B. 60.

M=10	N	P	Q	R=130

Si la suma de les tres primeres caselles ha de ser $M + N + P = 100$, vol dir que $N + P = 90$. Com que les tres centrals han de sumar $N + P + Q = 200$ vol dir que $Q = 200 - 90 = 110$. Finalment, com que les tres últimes han de sumar $P + Q + R = 300$, a P hi ha de col·locar $P = 300 - (130 + 110) = 60$.

14. A. 51°.

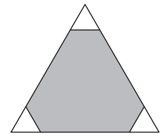


Si observem el triangle de vèrtexs B, D que té, a més l'angle de 93° deduïm que l'angle $D = 180° - (58° + 93°) = 29°$. Si ara passem al triangle de vèrtexs A, D que té, a més, l'angle de 100°, deduïm que $A = 180° - (100° + 29°) = 51°$.

15. C. 7.

A l'altra banda d'on hi ha escrit «primer» hi ha d'anar el 12 ja que és l'únic que no és primer dels quatre nombres. A l'altra banda d'on diu «senar» hi ha d'anar el 2 ja que és l'únic no senar que, ara, queda. Darrera d'on posa «divisible per 7» no hi pot anar el 7, per tant hi va el 5 i, doncs, darrera d'on diu «més gran que 100» hi ha d'anar el 7.

16. D. 1,5 cm.



Els costats de cada un dels triangles equilàters petits que estan a l'interior del triangle gran són comuns al perímetre de l'hexàgon i a la suma dels perímetres dels tres triangles. Per tant no cal considerar-los per fer la comparació de longituds que ens diu l'enunciat.
Ara sobre cada costat del triangle observem que la suma de dos costats dels triangles petits ha de ser igual al costat de l'hexàgon. Per tant la suma de dos costats del triangle petit és la meitat del costat inicial del triangle i això vol dir que cada costat dels triangles petits és una quarta part del costat del triangle gran: $\frac{6}{4} = 1,5$ cm.

17. C.6.

A partir de l'enunciat observem que dels nombres 1, 2, 4, i 8 només poden formar part de la llista de nombres de formatges robats o bé 1 i 4 o bé 1 i 8 o bé 2 i 8; en tot cas sempre n'hi ha dos que no hi poden ser. Com que tampoc no hi pot haver el 3 i 6 junts, sempre hi ha tres nombres que no hi poden ser. En conseqüència seran $9 - 3 = 6$ com a màxim, i en tenim un exemple si pensem en els nombres $\{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$.

18. E. 300 m.

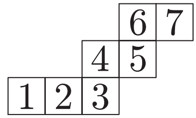
L'Aina és com si anés a $4 + 6 = 10$ km/h. Per tant fa 10 000 m en 60 minuts o 1 000 m en 6 minuts i, per tant, els 500 m que té la cinta els fa en 3 minuts. L'Oriol que va a 4 km/h , o sigui que fa 4 000 m en 60 minuts o 400 m en 6 minuts, en aquests 3 minuts fa 200 metres, per tant encara està a 300 metres del final i, per tant, de l'Aina.

19. D. 112 cm.

Observem que primer doblar el perímetre i després disminuir en 2 cm cada costat, i per tant disminuir el perímetre en 8 cm, dóna un resultat més gran que fer-ho al revés (primer disminuir el perímetre en 8 unitats i després doblar). Simbòlicament s'escriu així: $2p - 8 > 2(p - 8)$ o el que és el mateix $2p - 8 > 2p - 16$ cosa certa per a qualsevol valor p del perímetre. Per tant el que permetrà obtenir el quadrat més gran serà dir primerament les dues mentides i a continuació les dues veritats. Així el perímetre inicial de 32 cm passarà a ser successivament de 64 cm, 128 cm, 120 cm i 112 cm.

20. B. 1 i 6.

En passar de la posició 1 a la 3, la cara que inicialment és la inferior passa a ser la superior, en les posicions 4 i 5 passa a ser la que tenim oposada a la que veiem frontalment, i en la posició 6 torna a sota.



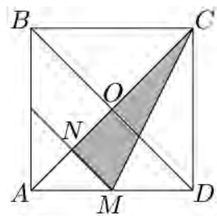
Qüestions de 5 punts

21. E. 50 cm.

Podem representar les altures dels cinc cubs així $x-4$, $x-2$, x, $x+2$ i $x+4$ i ens diuen que $x+4=(x-4)+(x-2)$, per tant $x=10$ i l'altura total, $(x-4)+(x-2)+x+(x+2)+(x+4)=5x$, serà de 50 cm.

22. E. 3:16.

Si dibuixem la diagonal BD, podem veure que MN és la meitat de DO i, a més, $CN=\frac{3}{4}AC$. Per tant l'àrea de MNC serà $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}AC\cdot\frac{1}{2}DO=\frac{3}{8}$ de l'àrea del triangle ADC i per tant $\frac{3}{16}$ de l'àrea del quadrat.



23. B. 24.

Si posem N el nombre de persones i h el nombre d'homes, l'enunciat ens diu que $\frac{3h}{4}=\frac{4(N-h)}{5}$ i d'aquí $31h=16N$ i, doncs, N ha de ser múltiple de 31. Com que ha de ser $N\leq 50$ això ens ens porta a la solució $N=31$, $x=16$ homes, dels quals tres quartes parts, que són 12, estan ballant amb 12 dones i per tant la solució és 24.

24. D. 6 i 8.

Comencem veient que els veïns de l'1 han de ser el 3 i el 4 i els del 2 el 4 i el 5. Com que el 5 no és veí del 3, ho serà el 6. Això fa que hagi d'aparèixer la sèrie 6-3-1-4-2-5 (en aquest sentit o en l'altre. Anàlogament els veïns del 12 han de ser el 10 i el 9 i els de l'11 el 9 i el 8 i el 7 haurà de ser veí del 10. Tenim també, doncs, la sèrie 7-10-12-9-11-8 (o en l'altre sentit). Per "lligar" les dues sèries que tenim no podem ajuntar el 7 amb el 6 i per tant la única opció vàlida és posar el 8 a continuació del 6.

25. D. 1993.

Com que els quadrats perfectes de dues xifres són 16, 25, 36, 49, 64 i 81, els nombres de referència poden tenir com a segona xifra un 1, un 4 o un 6 i són 816, 649, 164 i 364, la suma dels quals és 1993.

26. E. 23.

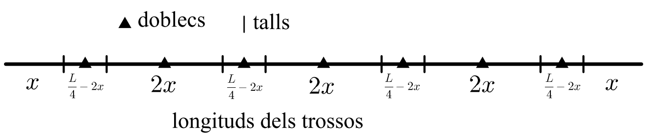
El nombre de relats que començaran en pàgines senars depèn de l'odre en què es col·loquin els relats d'un nombre de pàgines parell o imparell. Donat que el primer relat comença en la pàgina 1, si aquest té un nombre parell de pàgines el segon relat també començarà en pàgina senar, i si posem els quinze relats de nombre parell de pàgines al començament tindrem que els 16 primers relats comencen en pàgina senar. Dels 14 relats que falten, un sí i un no començaran en pàgina senar, i això fa un total de 23

27. B. 4.

El triangle gira primer 3°, desprès 9°, 27° i 81°. Com que la suma d'aquests quatre angles és 120° a la quarta posició torna a coincidir amb el triangle inicial. Les rotacions posteriors són de $243° = 2 \cdot 120° + 3°$, que per a un triangle equilàter equival a un gir de 3°, i successivament $6 \cdot 120° + 9°$, que en la pràctica és com girar 9°, $18 \cdot 120° + 27°$, que equival a 27°, etc. i, doncs, s'aniran repetint les quatre posicions que ja coneixem. Per tant la resposta és que hi ha 4 posicions diferents.

28. C. 72.

Amb aquest procés s'obtenen trossos de tres mides diferents. Si indiquem com L la longitud de la corda i com x la longitud del primer tros, el que correspon als extrems de la corda inicial, les tres longituds que s'obtenen són x, $\frac{L}{4} - 2x$ i $2x$.

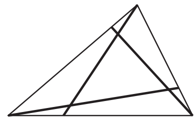


- Si $x = 4$, el segon tros és de 9 i la longitud de la corda és $L = 68$ m.
- Si fos $x = 9$ el segon hauria de ser el de 4 i resultaria $L = 88$ m.
- En el cas que ni 4 ni 9 no corresponguessin als trossos extrems, hauria de ser $x = 2$ m o bé $x = 4{,}5$ m i en els dos casos la mida de la corda seria 52 m.

Per tant la resposta correcta, la que no pot ser la longitud de la corda, és 72.

29. A. 13 cm.

Si fem la suma $20 + 25 = 45$ estarem comptant una vegada tots els segments que formen part del perímetre del triangle i dues vegades cada segment interior que pertany a la vegada a un triangle i un quadrilàter. Per tant la suma dels tres segments serà la meitat de $45 - 19$, és a dir, 13 cm.



30. A. 16 cm.

Si multipliquem els números de les quatre graelles 2×2 el resultat serà 16. Però en aquest producte de 16 elements, 9 corresponen al producte d'elements de 3 files i 6 més corresponen al producte de la columna i la fila central i tots aquests productes donen 1, amb la qual cosa només queda l'element central de la graella que per tant serà 16.

XVII Cangur SCM Nivell 2

Solucions (22 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

1. D. 1,40 €.

La venda total és igual a la suma del preu del lloguer més el benefici, és a dir, $90 + 120 = 210$ € i aquesta és la quantitat per la qual s'han venut totes les taronges. Així, el preu del kg és $\dfrac{210}{150} = 1{,}40$ €.

---

2. E. 18,108.

Només cal fer amb cura la resta $20{,}12 - 2{,}012$, començant naturalment amb la xifra dels mil·lèsims, que ha de ser un 8, tot seguit la dels centèsims, que serà un 0, etc.

---

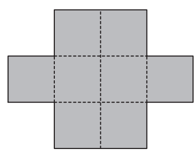
3. C. 30 minuts.

Si assenyala el sud-est, vol dir que falten 45° pel sud. Quan assenyale el nord-oest li faltaran 45° per al nord. Per tant ha de fer mitja volta, és a dir 30 minuts.

---

4. A. 128 cm^2.

El perímetre de la figura és igual a 14 vegades el costat dels quadrats iguals que la formen. Per tant el costat de cada quadrat és de 4 cm i la seva àrea és 16 cm^2. Com que hi ha vuit quadrats, l'àrea de la figura és de 128 cm^2.



---

5. C. 2.

El producte dels dos triangles pot prendre com a valor els quadrats dels dígits majors que 1.

$$\triangle \times \triangle = \square \times \bigcirc$$

Alguns són quadrats de nombres primers $2^2, 3^2, 5^2, 7^2$ i no és poden escriure com a producte de dos dígits diferents. Altres, $8^2, 9^2$, tampoc perquè són massa grans i caldria un factor superior a 9.

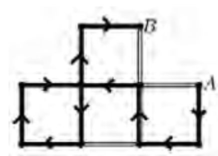
Per tant, només queden $4^2 = 8 \times 2$, $6^2 = 4 \times 9$.

6. D. $(9+9-9):9$.

Si passem al llenguatge algebraic i substituïm el 9 per x, tindrem que l'opció A dóna $(x+x-x)\cdot x = x^2$; la B i la C donen el mateix resultat, $x\cdot(x+x):x = x+x-x+x = 2x$; la D dóna $(x+x-x):x = 1$ i per tant el resultat no depèn del valor de x.; finalment la E també depèn del nombre que posem en el lloc del 9, $(x+x):x+x = 2+x$.

---

7. D. 1 000 m.



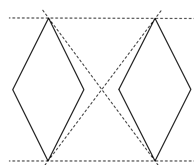
A la figura de la dreta es mostra un camí de longitud 1 000 m.
Aquesta és la màxima longitud possible perquè:

- En el quadrat que té un vèrtex en el punt A, on es comença elr ecorregut, no es pot passar pels quatre costats sense haver de passar una altra volta per un dels camins ja recorreguts.
- En el segon quadrat al qual arribarem després d'abandonar el quadrat inicial, on haurem recorregut tres costats, tampoc no podrem recórrer tots quatre costats sense repetir un trajecte.
- Finalment, en el quadrat que té com un dels vèrtexs el punt B forçosament arribarem a B abans d'haver recorregut tots quatre costats del quadrat.

Per tant és segur que hi haurà tres camins pels quals no passarem. El major nombre possible de camins serà, doncs, $13-3=10$.

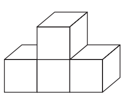
---

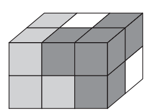
8. D. 4.



Des dels quatre vèrtexs que estan a la mateixa altura, dos de cada rombe, no podem fer cap recta que s'uneixi a un vèrtex de l'atre rombe sense que creue algun dels dos rombes.
Des dels altres vèrtexs en podem fer dues en cada cas.

---

9. E.  .



La figura ens fa veure que els tres cubs del darrere que estan a baix són tots blancs, i el del mig de dalt també.

---

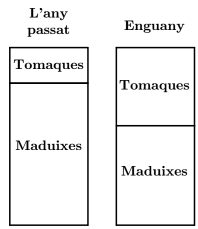
10. C. Caterina.

Si observem les persones que obririen successivament cada porta, imaginant que hi hagués moltes portes, podem observar que, des del començament, s'aniria repetint la seqüència A, B, C, D, E.
La vuitena porta l'obre, doncs, C, Caterina.

Qüestions de 4 punts

11. D. 50 m^2.

Si l'àrea de les maduixes ha minvat 50 m^2 vol dir que la zona de les tomaques ha augmentat aquest valor. Com que un dels costats (l'alçada segons el dibuix) s'ha allargat 5 m, això vol dir que l'altre costat (l'amplada) fa 10 m ($5 \times 10 = 50$). En conseqüència el quadrat actual de les tomaques fa 10×10. Com que l'alçada ha augmentat 5 metres respecte l'any passat, vol dir que feia 5 m. Per tant l'àrea de les tomaques abans del canvi era 5 m $\times$ 10 m $=$ 50 m^2.



12. C. 3 825.

Per tal que la suma sigui la menor possible cal que les desenes de miler siguin els dos nombres menors possibles (1 i 2) i, seguint el mateix raonament per a les altres posicions, així arribarem a la solució: $1\,357 + 2\,468 = 3\,825$.

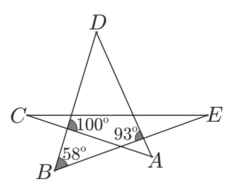
13. D. 100.

M=40	N	P	Q	R=260

Si la suma de les tres primeres caselles ha de ser $M + N + P = 200$, vol dir que $N + P = 160$. Com que les tres centrals han de sumar $N + P + Q = 400$ vol dir que $Q = 400 - 160 = 240$. Finalment, com que les tres últimes han de sumar $P + Q + R = 600$, a P hi ha de col·locar $P = 600 - (260 + 240) = 100$.

14. C. 51°.

Si observem el triangle de vèrtexs B, D que té, a més l'angle de 93° deduïm que l'angle $D = 180° - (58° + 93°) = 29°$. Si ara passem al triangle de vèrtexs A, D que té, a més, l'angle de 100°, deduïm que $A = 180° - (100° + 29°) = 51°$.

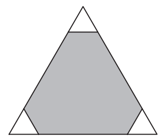


15. B. 11.

A l'altra banda d'on hi ha escrit «primer» hi ha d'anar el 22 ja que és l'únic que no és primer dels quatre nombres. A l'altra banda d'on diu «senar» hi ha d'anar el 2 ja que és l'únic no senar que, ara, queda. Darrera d'on posa «divisible per 7» no hi pot anar el 7, per tant hi va l'11 i comprovem que també la darrera trageta compleix l'enunciat perquè el 7 no és «més gran que 100» .

16. B. 2,5 cm.

Els costats de cada un dels triangles equilàters petits que queden a l'interior del triangle gran són comuns al perímetre de l'hexàgon i a la suma dels perímetres dels tres triangles. Per tant no cal considerar-los per fer la comparació de longituds que ens diu l'enunciat.



Ara sobre cada costat del triangle observem que la suma de dos costats dels triangles petits ha de ser igual al costat de l'hexàgon. Per tant la suma de dos costats del triangle petit és la meitat del costat inicial del triangle i això vol dir que cada costat dels triangles petits és una quarta part del costat del triangle gran: $\dfrac{10}{4} = 2{,}5$ cm.

17. B. En 12.

La quantitat de peces que resulten depén del nombre de talls horitzontals i verticals que es facen. Per exemple, si només fa 7 talls verticals eixiran 8 peces. Si en fa 6 verticals (i per tant, la tarta queda dividida en 7 trossos) i només 1 horitzontal, llavors cadascun dels trossos verticals queda partit en dos i així apareixeran $7 \times 2 = 14$ peces. Les possibilitats que resten són :

- 5 talls verticals i 2 horitzontals: $6 \times 3 = 18$ peces.
- 4 talls verticals i 3 horitzontals: $5 \times 4 = 20$ peces.

I ja no hi ha més possibilitats perquè si canviem talls horitzontals per verticals el resultat en nombre de peces és el mateix.

En definitiva, l'única quantitat de peces en què no es pot tallar el pastís, de les que apareixen a les opcions de resposta, és la B, en 12 peces.

18. A. 64.

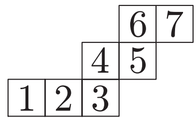
Un cub té 12 arestes, per tant, si es vol construir-ne un sense perdre ni un mil·límetre de filferro, cada aresta haurà de tenir $\dfrac{48}{12} = 4$ dm. Així, el volum del cub serà $4^3 = 64$ dm^3.

19. D. Dijous.

Com que Eugènia menteix en dilluns, dimecres i dijous, i diu la frase «Avui és dilluns», aquesta és frase és falsa i això vol dir que avui no és dilluns i tampoc no pot ser dimarts, divendres, dissabte o diumenge, perquè eixos dies, Eugènia diu la veritat. Només queden dues possibilitats: dimecres o dijous. Això vol dir que la resposta d'Ausiàs també ha de ser falsa. Com que Ausiàs en dimecres diu la veritat, l'única possibilitat és que siga dijous.

20. B. 1 i 6.

En passar de la posició 1 a la 3, la cara que inicialment és la inferior passa a ser la superior, en les posicions 4 i 5 passa a ser la que tenim oposada a la que veiem frontalment, i en la posició 6 torna a sota.



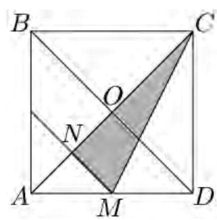
Qüestions de 5 punts

21. A. 37,5 cm.

Podem representar les altures dels cinc cubs així $x-6$, $x-3$, x, $x+3$ i $x+6$ i ens diuen que $x+6=(x-6)+(x-3)+x$, per tant $x = 7{,}5$ i l'altura total, $(x-6)+(x-3)+x+(x+3)+(x+6)=5x$, serà de 37,5 cm.

22. D. 3:16.

Si dibuixem la diagonal BD, podem veure que MN és la meitat de DO i, a més, $CN = \frac{3}{4}AC$. Per tant l'àrea de MNC serà $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}AC\cdot\frac{1}{2}DO=\frac{3}{8}$ de l'àrea del triangle ADC i per tant $\frac{3}{16}$ de l'àrea del quadrat.



23. D. 8.

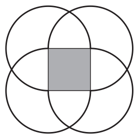
Anem a comprovar que hi ha la mateixa quantitat de cangurs veraços que de cangurs mentiders.

Suposem que hi haguera 9 o més cangurs veraços. Considerem el nové cangur veraç comptant des de l'esquerra. A la seua esquerra sabem segur que hi ha exactament 8 cangurs veraços, mentre que a la seua dreta com a molt hi ha 7 cangurs. Per tant, l'afirmació «A la meua esquerra el nombre de cangurs veraços és més petit que el de mentiders a la dreta» seria falsa i això contradiu que el cangur siga veraç.

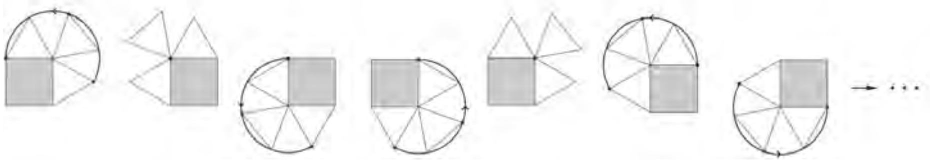
Suposem que hi haguera 9 o més cangurs mentiders. Considerem el nové cangur veraç comptant des de la dreta. A la seua dreta sabem segur que hi ha exactament 8 cangurs mentiders, mentre que a la seua esquerra com a molt hi ha 7 cangurs. Per tant, l'afirmació «A la meua esquerra el nombre de cangurs veraços és més petit que el de mentiders a la dreta» és verdadera, però això contradiu que el cangur siga mentider.

Per tant hi ha, exactament, 8 cangurs veraços i 8 cangurs mentiders.

---

24. A.  .

La imatge següent mostra les primeres rotacions. Observeu que en la segona, en la cinquena, etc. el vèrtex que interessa es queda quiet.



Si aneu continuant sistemàticament els girs i observeu la cadència de la línia que descriu el vèrtex veureu que la solució és la indicada.

---

25. B. 1993.

Com que els quadrats perfectes de dues xifres són 16, 25, 36, 49, 64 i 81, els nombres de referència poden tenir com a segona xifra un 1, un 4 o un 6 i són 816, 649, 164 i 364, la suma dels quals és 1993.

---

26. C. 25.

Calculem primer el nombre total de carreteres, visibles o no. Cada carretera uneix dues ciutats, per tant de cada ciutat eixiran 8 carreteres. En principi podria semblar que hi ha $9 \times 8 = 72$ carreteres, però si les comptem així, resulta que cada carretera l'hauríem comptada dues vegades, una per cada ciutat que uneix. Per tant, haurem de dividir per 2 i així trobem que hi ha $\frac{72}{2} = 36$ carreteres.
Com que hi ha 11 carreteres visibles, les invisibles són $36 - 11 = 25$.

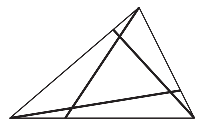
---

27. C. 4.

El triangle gira primer $3°$, desprès $9°$, $27°$ i $81°$. Com que la suma d'aquests quatre angles és $120°$ com a resultat de la quarta rotació torna a coincidir amb el triangle inicial. Les rotacions posteriors són de $243° = 2 \cdot 120° + 3°$, que per a un triangle equilàter equival a un gir de $3°$, i successivament $6 \cdot 120° + 9°$, que en la pràctica és com girar $9°$, $18 \cdot 120° + 27°$, que equival a $27°$, etc. i, doncs, s'aniran repetint les quatre posicions que ja coneixem. Per tant la resposta és que hi ha 4 posicions diferents.

28. C. 13 cm.

Si fem la suma $20 + 25 = 45$ estarem comptant una vegada tots els segments que formen part del perímetre del triangle i dues vegades cada segment interior que pertany a la vegada a un triangle i un quadrilàter. Per tant la suma dels tres segments serà la meitat de $45 - 19$, és a dir, 13 cm.

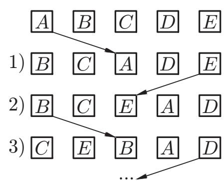


29. E. 16 cm.

Si multipliquem els números de les quatre graelles 2×2 el resultat serà 16. Però en aquest producte de 16 elements, 9 corresponen al producte d'elements de 3 files i 6 més corresponen al producte de la columna i la fila central i tots aquests productes donen 1, amb la qual cosa només queda l'element central de la graella que per tant serà 16.

30. B.

El primer que hem de fer és determinar en quin moment tornem a tenir la configuració inicial $ABCDE$. Cada dos passos fem una permutació de les lletres: la que estava en el primer lloc va a parar al quart, la que estava en el segon va parar al tercer, etc. Si fem cinc vegades aquesta operació (els dos passos), és a dir en el pas 10, aleshores obtenim la configuració inicial. El mateix tindrem en el pas 2010. Per tant, el resultat en el pas 2012 és el mateix que en el pas número 2. La carta a l'esquerra del tot és la B.



XVII Cangur SCM Nivell 3

Enunciats (15 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

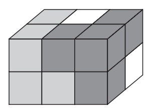
1. En quatre de les expressions següents, podem substituir cada nombre 8 per un altre nombre positiu, utilitzant sempre el mateix nombre per a cada substitució, sense que canviï el resultat. Quina expressió no té aquesta propietat?

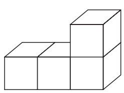
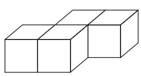
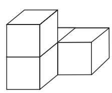
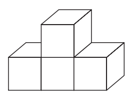
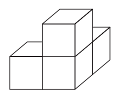
A) $(8 + 8 + 8) : 8$ B) $8 + (8 : 8) - 8$ C) $8 : (8 + 8 + 8)$
D) $8 \cdot (8 : 8) : 8$ E) $8 - (8 : 8) + 8$

2. L'Andreu juga amb la calculadora i escriu 11,11−1,111. Quin resultat apareixerà a la calculadora?

A) 9,009 B) 9,0909 C) 9,99 D) 9,999 E) 10

3. Un ortoedre està fet amb tres peces, tal com indica el dibuix. Cada peça està formada per 4 cubs, tots del mateix color. Quina de les peces següents correspon a la peça blanca?

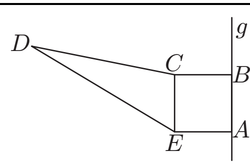


A)

B)

C)

D)

E)


4. Si l'Albert està dret sobre la taula i en Miquel és a terra, l'Albert és 80 cm més alt que en Miquel. Si en Miquel està dret sobre la mateixa taula i l'Albert és a terra, aleshores en Miquel és un metre més alt que l'Albert. Quina és l'altura de la taula?

A) 20 cm B) 80 cm C) 90 cm D) 100 cm E) 120 cm

5. El quadrat $ABCE$ fa 4 cm de costat i té la mateixa àrea que el triangle ECD. Quina és la distància del punt D a la recta g?



A) 12 cm B) $(4 + 2\sqrt{3})$ cm C) 8 cm D) $10\sqrt{2}$ cm

E) Depèn de la localització de D.

6. Si sumem les xifres d'un nombre de set xifres, obtenim de resultat 6. Quin és el producte d'aquestes xifres?

A) 0 B) 6 C) 7 D) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ E) 5

7. Les longituds dels catets d'un triangle rectangle ABC són 6 cm i 8 cm. Els punts K, L, M són els punts mitjans dels costats del triangle. Quin és el perímetre del triangle KLM?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 20 E) 24

8. En un nombre de quatre xifres, la xifra de les centenes és un 3 i la suma de les altres tres xifres també és 3. Quants nombres compleixen aquestes condicions?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

9. Dos costats d'un quadrilàter fan 1 i 4. Una de les diagonals, que té longitud 2, divideix el quadrilàter en dos triangles isòsceles. Quin és el perímetre del quadrilàter?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

10. Quan dividim els nombres 144 i 220 per un cert enter positiu x, obtenim el mateix residu 11. Calculeu x.

A) 7 B) 15 C) 38 D) 11 E) 19

Qüestions de 4 punts

11. El resultat de

$$1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + \cdots + 96^2 + 97^2 - 98^2 - 99^2 + 100^2$$

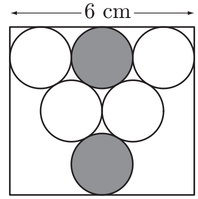
és:

A) 25 B) 50 C) 100 D) 200 E) 400

12. En Daniel i la Maria llancen una moneda: si surt cara, guanya la Maria i en Daniel ha de donar-li dos caramels. Si surt creu, el guanyador és en Daniel i la Maria ha de donar-li tres caramels. Després de trenta llançaments, cada un d'ells té els mateixos caramels que tenia abans de començar a jugar. Quantes vegades ha guanyat en Daniel?

A) 6 B) 12 C) 18 D) 24 E) 30

13. En un rectangle de 6 cm de base hem dibuixat sis cercles tangents del mateix radi, com es veu a la figura. Quina és, en centímetres, la distància més curta entre els dos cercles grisos?

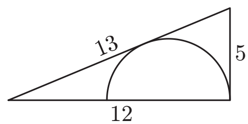


A) $2\sqrt{3}-2$ B) $\sqrt{2}$ C) 1 D) $\dfrac{\pi}{2}$ E) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

14. A l'habitació d'en Bru hi ha rellotges a cadascuna de les parets però cap marca l'hora exacta, uns van avançats i els altres endarrerits. Els errors que fan són de 2 minuts, 3 minuts, 4 minuts i 5 minuts. En Bru vol saber l'hora exacta i en els rellotges veu les tres menys 6 minuts, les tres menys 3 minuts, les tres i 2 minuts i les tres i 3 minuts. L'hora exacta és:

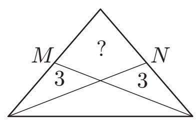
A) Les tres en punt
B) Les tres menys tres minuts
C) Les tres menys dos minuts
D) Les tres i un minut
E) Les tres menys un minut

15. A la figura es pot veure un triangle rectangle amb costats 5, 12 i 13. Quin és el radi del semicercle inscrit?



A) $\dfrac{7}{3}$ B) $\dfrac{10}{3}$ C) $\dfrac{12}{3}$ D) $\dfrac{13}{3}$ E) $\dfrac{17}{3}$

16. M i N són els punts mitjans dels costats iguals d'un triangle isòsceles. L'àrea de dos dels triangles petits que es formen és 3, tal com indica la figura. L'àrea de la peça en forma de quadrilàter és:



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

17. Escrivim dotze nombres, elegits de l'1 al 9, en els quadrats de la figura, de manera que la suma de cada fila és la mateixa i la suma de cada columna és la mateixa. Uns quants nombres ja estan escrits. Quin nombre hem d'escriure en el quadrat ombrejat?

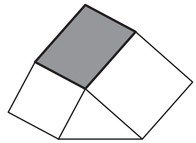
2	4		2
	3	3	
6		1	

A) 1 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

18. Tres atletes, en Can, en Gu i en Ret, participen en una marató. Abans del començament de la cursa, quatre espectadors del públic han discutit les possibilitats de victòria dels atletes. El primer ha afirmat «O bé en Can o bé en Gu guanyarà». El segon ha dit «Si en Gu és el segon, en Ret guanyarà». El tercer ha sentenciat «Si en Gu és el tercer, en Can no pot guanyar». El quart ha replicat «O bé en Gu o bé en Ret serà el segon». Després de la cursa comproven que els quatre tenien raó. En quin ordre han acabat els atletes?

A) Can, Gu, Ret B) Can, Ret, Gu C) Ret, Gu, Can
D) Gu, Ret, Can E) Gu, Can, Ret

19. La figura està formada per dos quadrats de costats 4 i 5 cm, un triangle amb 8 cm^2 d'àrea i un paral·lelogram (ombrejat). Quina és l'àrea del paral·lelogram?



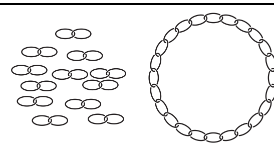
A) 15 cm^2 B) 16 cm^2 C) 18 cm^2 D) 20 cm^2 E) 21 cm^2

20. L'Anna ha escrit $2012 = m^m \cdot (m^k - k)$, on m i k són nombres enters positius. Quin és el valor de k?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 9 E) 11

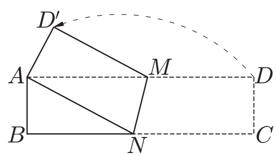
Qüestions de 5 punts

21. Un joier té 12 peces formades cada una per dues anelles enllaçades. Vol construir una cadena amb totes les peces. Per a fer-ho haurà d'obrir algunes de les anelles i després tornar-les a tancar. Quin és el mínim nombre d'anelles que li caldrà obrir?



A) 8 B) 7 C) 10 D) 6 E) 12

22. Un rectangle de paper $ABCD$ 4 cm $\times$ 16 cm es doblega per la línia MN, de manera que el vèrtex C coincideixi amb el vèrtex A, tal com es mostra a la figura. Quina és l'àrea del pentàgon $ABNMD'$?



A) 46 B) 47 C) 48 D) 49 E) 52

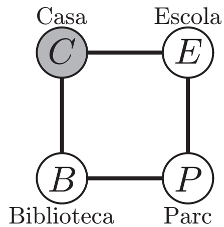
23. El tren G, que circula a velocitat constant, tarda 8 segons a passar un pal de senyal. Seguidament es troba amb el tren H, que circula en sentit contrari, també a velocitat constant i s'encreuen durant 9 segons. Després, el tren H arriba al pal de senyal i el passa en 12 segons. Què pots dir de la llargada dels trens?

A) G té doble llargada que H.
B) G i H tenen la mateixa llargada.
C) H és un 50 % més llarg que G.
D) H és el doble de llarg que G.
E) No se'n pot dir res.

24. La darrera xifra diferent de zero del nombre $K = 2^{59} \cdot 3^4 \cdot 5^{53}$ és

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 9

25. En Pere ha creat el joc del Cangur per a ordinador. Al dibuix es pot veure el tauler del joc. A l'inici, el Cangur és a l'escola E. D'acord amb les regles del joc, des de qualsevol lloc, excepte si és a casa, C, el Cangur pot saltar cap a un dels dos llocs veïns. Quan arriba a C, el joc s'acaba. De quantes maneres diferents pot anar el Cangur de E a C fent exactament 13 salts?



A) 12 B) 32 C) 64 D) 144 E) 1024

26. Tenim cinc làmpades, cada una amb un interruptor que pot estar obert o tancat. Cada vegada que accionem un dels interruptors no solament canviem el seu estat sinó que, a més a més, un dels altres interruptors escollit a l'atzar també canvia el seu estat (per a una mateixa làmpada l'elecció de l'altra pot ser diferent cada vegada). En començar, totes les làmpades estan apagades. Si a continuació fem 10 accions d'apagar o encendre interruptors, podem dir que:

A) És impossible que totes les làmpades estiguin enceses.
B) Segur que totes les làmpades estan enceses.
C) És impossible que totes les làmpades estiguin apagades.
D) Segur que totes les làmpades estan apagades.
E) Cap de les afirmacions anteriors no és correcta.

27. Ens donen sis enters positius diferents, el més gran dels quals és n. Hi ha exactament un parell d'aquests enters amb la propietat que el nombre petit no és divisor del gran. Quin és el valor més petit que pot tenir n?

A) 18 B) 20 C) 24 D) 36 E) 45

28. La Laia ha escrit tots els nombres de tres xifres i per a cada nombre ha fet el producte de les seves xifres. Tot seguit ha sumat tots els productes. Quin nombre ha obtingut?

A) 45 B) 45^2 C) 45^3 D) 2^{45} E) 3^{45}

29. S'han escrit els nombres del 1 al 120 en 15 files, tal com es veu a la figura.

1								
2	3							
4	5	6						
7	8	9	10					
11	12	13	14	15				
...	...	...	...	...	...			
....	....	....	....	....	....	....	....	
106	107	108	109	110	111	112	....	120

Quina columna, comptada des de l'esquerra, té la suma dels seus nombres més gran?

A) 1 B) 5 C) 7 D) 10 E) 13

30. A, B, C, D, E, F, G i H són els vuit vèrtexs consecutius d'un octògon convex. S'escull a l'atzar un vèrtex d'entre C, D, E, F, G i H i es dibuixa el segment que el connecta amb el vèrtex A; seguidament d'entre els mateixos sis vèrtexs se n'elegeix un a l'atzar i es traça el segment que el connecta amb el vèrtex B. Quina és la probabilitat que els dos segments dibuixats divideixin l'octògon en tres regions exactament?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{5}{18}$

XVII Cangur SCM Nivell 3

Enunciats (22 de març de 2012)

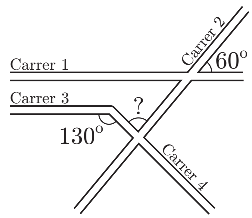
Qüestions de 3 punts

1. Andreu juga amb la calculadora i hi escriu això: 20,12 – 2,012. Quin resultat obté?

A) 17,892 B) 18,118 C) 18 D) 18,008 E) 18,108

---

2. En el plànol d'una urbanització observem que els carrers 1 i 3 són paral·lels i que hi ha marcats els angles que formen alguns carrers. Trobeu el valor de l'angle marcat amb el signe d'interrogació.



A) 50° B) 60° C) 70° D) 80° E) 90°

---

3. En una granja hi ha corders i vaques, exactament la mateixa quantitat de corders que de vaques. El granger ens diu que vol comprar més vaques, de manera que el seu nombre augmentarà en un 50% i que, aleshores, el nombre de corders serà només el 30% del total d'animals a la granja. Quants corders hi ha a la granja?

A) 8 B) 9 C) 10 D) Una altra quantitat

E) No és possible aconseguir el que diu el granger

---

4. Sobre una taula hi ha dos muntons de pedres; el primer té set pedres i el segon, deu. Adrià vol fer un joc que consisteix a llevar pedres successivament fins que no en quede cap. Les úniques accions que pot fer són:

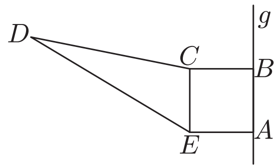
- Llevar tres pedres del primer muntó.
- Llevar dues pedres del segon muntó.
- Llevar una pedra de cada muntó.

Quin és el nombre mínim d'accions que ha de fer Adrià perquè no quedi cap pedra sobre la taula?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

---

5. El quadrat $ABCE$ mesura 5 cm de costat i té la mateixa àrea que el triangle ECD. Quina és la distància des del punt D fins a la recta g?



A) 15 cm B) 10 cm C) $5(1+\sqrt{3})$ cm
D) $\dfrac{15}{2}\cdot\sqrt{2}$ cm E) Depèn de la posició del punt D

6. Si sumem les xifres d'un nombre de set xifres, obtenim de resultat 6. Quin és el producte d'aquestes xifres?

A) 0 B) 6 C) 7 D) $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7$ E) 5

7. ABC és un triangle rectangle els catets del qual mesuren 5 cm i 12 cm de llarg, i els punts K, L, M són els centres dels seus costats. Quin és el perímetre del triangle KLM?

A) 13 B) 19,5 C) 30 D) 15 E) 26

8. Imaginem un tetràedre amb un nombre natural positiu en cada vèrtex. Si sumem els nombres dels tres vèrtexs de cada cara els resultats són 6, 7, 8 i 9. Quin nombre hi ha en el vèrtex oposat a la cara que suma 7?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. Els números 174 i 266, quan es divideixen pel nombre enter positiu x donen el mateix residu 13. Trobeu x.

A) 46 B) 13 C) 11 D) 7 E) 23

10. A l'habitació de Bru hi ha rellotges a cadascuna de les parets però cap d'ells marca l'hora exacta, uns van avançats i els altres endarrerits. Els errors que fan són de 3 minuts, 5 minuts, 6 minuts i 7 minuts. Bru vol saber l'hora exacta i en els seus rellotges veu les quatre menys 5 minuts, les quatre menys 3 minuts, les quatre i 5 minuts i les quatre i 8 minuts. L'hora exacta és:

A) Les quatre menys 3 minuts
B) Les quatre menys 1 minut
C) Les quatre en punt
D) Les quatre i 2 minuts
E) Les quatre i 3 minuts

Qüestions de 4 punts

11. Si Albert està dret damunt d'una cadira i Miquel és en terra, Albert és 70 cm més alt que Miquel. Si Miquel està dret damunt de la mateixa cadira i Albert és en terra, aleshores Miquel és 50 cm més alt que Albert. Quina és l'altura de la cadira?

A) 20 cm B) 50 cm C) 120 cm D) 70 cm E) 60 cm

12. Daniel i Maria llancen una moneda: si surt cara guanya Maria i Daniel ha de donar-li dos caramels. Si surt creu el guanyador és Daniel i Maria ha de donar-li tres caramels. Després de trenta llançaments cada un d'ells té els mateixos caramels que tenia abans de començar a jugar. Quantes vegades ha guanyat Maria?

A) 6 B) 12 C) 18 D) 24 E) 30

13. Dos costats d'un quadrilàter mesuren 1 i 4. Una de les diagonals, que té una longitud de 2, divideix el quadrilàter en dos triangles isòsceles. Quin és el perímetre del quadrilàter

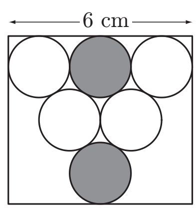
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

14. Tenim 25 monedes disposades damunt d'una taula que formen un quadrat. Anna lleva sis monedes, de manera que en cada fila i en cada columna resta un nombre imparell de monedes. Quantes files amb 3 monedes queden en la taula?

A) Cap B) 1 C) 2 D) 3

E) No és possible fer el que diu l'enunciat

15. En el rectangle de la figura, de 6 centímetres de base, hem dibuixat sis cercles tangents del mateix radi, com es veu en la figura. Quina és la distància més curta, en centímetres, entre els dos cercles grisos?



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}-2$ D) $\dfrac{\pi}{2}$ E) 2

16. Dotze nombres elegits de l'1 al 9 es poden escriure en els quadrats de la figura, de manera que la suma de cada fila és la mateixa i la suma de cada columna és la mateixa. Ja hi ha escrits alguns nombres. Quant sumen els nombres de cada fila?

2	4		2
	3	3	
6		1	

A) 9 B) 10 C) 12 D) 16 E) 17

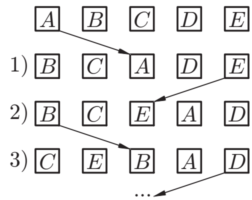
---

17. Quants enters positius, k, existeixen amb la propietat que $k+3$ siga múltiple de $k-3$?

A) Cap B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

---

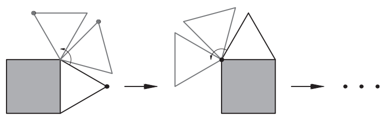
18. Al principi les cartes A, B, C, D, E estan col·locades en aquest ordre d'esquerra a dreta. En un primer pas la carta de l'esquerra se situa al mig; en un segon pas, la carta de la dreta se situa al mig, i així successivament. Quina carta és a l'esquerra del tot en el pas 2012?



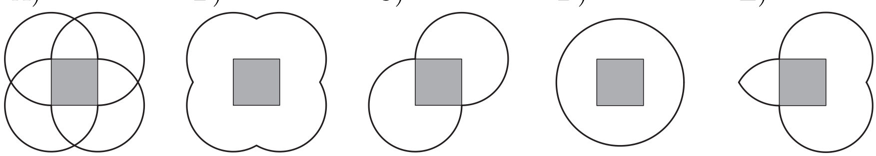
A) A B) B C) C D) D E) E

---

19. Un triangle equilàter gira al voltant d'un quadrat (vegeu la figura). Quina forma té la figura que descriu el punt marcat fins que el triangle arriba a la seua posició inicial per primera vegada?



A) B) C) D) E)

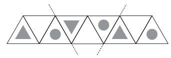
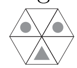


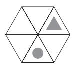
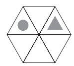
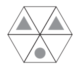
---

20. Anna ha escrit $2012 = m^m \cdot (m^k - k)$, en què m i k són nombres enters positius. Quin és el valor de k?

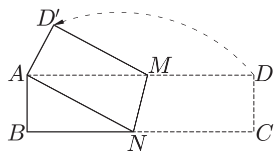
A) 11 B) 9 C) 4 D) 3 E) 2

Qüestions de 5 punts

21. Una tira de paper blanc està dividida en nou triangles equilàters. En la part del davant del paper alguns d'aquests triangles tenen dibuixat un cercle o un triangle de color negre, com mostra la figura següent: 
Doblegant la tira per les línies de punts (cap amunt o cap avall) hem obtingut un hexàgon regular i una de les cares d'aquest hexàgon es veu així: 
Què podem veure a l'altra cara de l'hexàgon?

A)  B)  C)  D)  E) 

22. Un rectangle de paper $ABCD$ que mesura 4 cm $\times$ 16 cm es doblega per la línia MN, de manera que el vèrtex C coincideixi amb el vèrtex A, tal com es mostra en la figura. Quina és l'àrea, en centímetres quadrats, del triangle ANM, que correspon a la zona de superposició?



A) 17 B) 24 C) 34 D) 28 E) 15

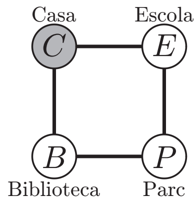
23. Quin és el residu de la divisió del nombre $\underbrace{\underbrace{2012}\ldots\underbrace{2012}}_{2.012 \text{ vegades}}$ per 9?

A) 0 B) 3 C) 5 D) 7 E) 8

24. El tren G, que circula a una velocitat constant, tarda 8 segons a passar per un senyal quilomètric. Seguidament es troba amb el tren H, que circula en sentit contrari, també a una velocitat constant i s'encreuen durant 9 segons. Després, el tren H arriba al senyal quilomètric i el passa en 12 segons. Què pots dir de la llargada dels trens?

A) G té doble llargada que H.
B) G i H tenen la mateixa llargada.
C) H és un 50 % més llarg que G.
D) H és el doble de llarg que G.
E) No se'n pot dir res.

25. Pere ha creat un joc del Cangur per a ordinador. En el dibuix es pot veure el tauler del joc. A l'inici, el Cangur és a l'escola (E). D'acord amb les regles del joc, des de qualsevol lloc, excepte si és a casa (C), el Cangur pot saltar cap a un dels dos llocs veïns. Quan arriba a C, el joc s'acaba. De quantes maneres diferents pot anar el Cangur de E a C fent exactament tretze salts?

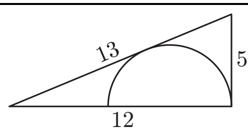


A) 12 B) 32 C) 64 D) 144 E) 1.024

26. Tenim 5 llums, cada un amb un interruptor, que pot estar obert o tancat. Cada vegada que accionem un dels interruptors no solament canviem el seu estat sinó que, a més a més, un dels altres interruptors escollit a l'atzar també canvia el seu estat (per a un mateix llum l'elecció de l'altre pot ser diferent cada vegada). En començar, tots els llums estan apagats. Si a continuació fem deu accions d'apagar o encendre interruptors, podem dir que:

A) És impossible que tots els llums estiguin apagats.
B) Segur que tots els llums estan encesos.
C) És impossible que tots els llums estiguin encesos.
D) Segur que tots els llums estan apagats.
E) Cap de les afirmacions anteriors és correcta.

27. En la figura es pot veure un triangle rectangle amb costats 5, 12 i 13. Quin és el radi del semicercle inscrit?

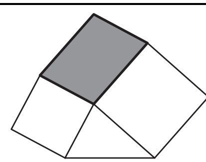


A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{10}{3}$ C) $\frac{12}{3}$ D) $\frac{13}{3}$ E) $\frac{17}{3}$

28. Quants triangles diferents hi ha amb els costats de longitud un nombre enter i el perímetre igual a 20?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 12

29. La figura és formada per dos quadrats amb els costats de 4 cm i 5 cm, un triangle amb 8 cm^2 d'àrea i un paral·lelogram ombrejat. Quina és l'àrea del paral·lelogram?



A) 15 cm^2 B) 16 cm^2 C) 18 cm^2 D) 20 cm^2 E) 21 cm^2

30. S'han escrit els nombres de l'1 al 210 en dènou files, tal com es veu en la figura.

1								
2	3							
4	5	6						
7	8	9	10					
11	12	13	14	15				
…	…	…	…	…	…			
....	....	....	....	....	....	....	....	
172	173	174	175	176	177	178	....	190

Quina columna, comptada des de l'esquerra, té la suma dels seus nombres més gran?

A) La quinzena B) L'onzena C) La novena
D) La cinquena E) La primera

Premis i mencions. Catalunya i Andorra

Primers premis, ex aequo
Pau Surrell Rafart (Institut Jaume Vicens Vives, Girona) i
Marc Felipe Alsina (Institut Jaume Vicens Vives, Girona), 137,5 punts

Premi per al pòdium
Pol Paniagua Seriols (IPSI, Barcelona), 121 punts

Premis de categoria A
Daniel Reverter Condal (Súnion, Barcelona), 116,25 punts
Sergi Masot Llima (IPSI, Barcelona), 114,75 punts

Premis de categoria B
ex aequo, David Folqué Garcia (Salesians Sant Vicenç dels Horts) i
Daniel Lugosi Enes (Barcelona), 112 punts
Martí Fernández-Real Girona (Institut Jaume Vicens Vives, Girona), 111 punts

Premis de categoria C
ex aequo, Haowei Lin (Institut Joan Oró, Lleida) i
Roger Macaya Munell
(Institut Leonardo da Vinci, Sant Cugat del Vallès), 109,75 punts
Meng Hui Tong (Institut La Sedeta, Barcelona), 100 punts

Premis de categoria D
David Castells Graells (Escola Pia de Terrassa, Terrassa), 96,75 punts
ex aequo, Esteve Bramon Casademont (Institut Pere Alsius i Torrent, Banyoles)
i Matt Hoogsteder Riera (Institut Pere Alsius i Torrent, Banyoles), 95,5 punts

Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions

David Cañones Bonham (Lestonnac, Barcelona), 95 punts
Marc González Pereira (Ramar 2, Sabadell), 95 punts
Oleguer Lluch Grané (Aula Escuela Europea, Barcelona), 93,75 punts
Jordi Company Pla (Institut Cirviànum de Torelló, Torelló), 93,75 punts
Ricard Cuervo Saliné (Institut Joan Fuster, Barcelona), 93,75 punts
Sara Martín Bolívar (Institut La Ferreria, Montcada i Reixac), 93,5 punts
Robert Seara Mora (Institut Ernest Lluch, Barcelona), 93 punts
Quim Llorens Giralt (IPSI, Barcelona), 93 punts
Joan Morgó Homs (Maristes La Immaculada, Barcelona), 92,75 punts
Eduard Gonzalvo Gelabert (Frederic Mistral-Tècnic Eulàlia, Barcelona), 92 punts
Xavier Gavarro Busquest (Sant Nicolau, Sabadell), 91,25 punts
Marcello Longo (Institut Costa i Llobera, Barcelona), 91 punts
Àlex Armillas Montornés (Institut Guindàvols, Lleida), 90,75 punts
Miquel Navarro Ramírez (Institut de Lliçà, Lliçà d'Amunt), 90,5 punts
Jose Santamaría Rodríguez (Institut Leonardo da Vinci, Sant Cugat del Vallès), 89,75 punts
Sergi Burniol Clotet (Institut Lacetània, Manresa), 89,25 punts
Albert Josep Diaz Carrasquer (Ramar 2, Sabadell), 89,25 punts
Pau Moncusí Pino (Institut Gabriel Ferrater i Soler, Reus), 89,25 punts
David Freixes Serrano (La Farga, Sant Cugat del Vallès), 89 punts
Guillem Cano Bergadà (Maristes La Immaculada, Barcelona), 89 punts
David Ortiz Bujella (Llor, Sant Boi de Llobregat), 88,75 punts
Yihao Yu (Institut Verdaguer, Barcelona), 88,75 punts
Blai Barberá Bertrans (Institut Emperador Carles, Barcelona), 88,75 punts
Miquel Sierra Montoya (Institut Leonardo da Vinci, Sant Cugat del Vallès), 88,75 punts
Miquel Sans Canudas (Institut Manuel de Cabanyes, Vilanova i la Geltrú), 88,5 punts
David Moreno Martos (Institut Torre Roja, Viladecans), 87,75 punts

Premis. Balears

Primer premi

Francesc Vanrell Bosch (IES Mossèn Alcover, Manacor), 92,25 punts

Segon premi

Enric Martorell Pons (Col·legi Sant Josep Obrer I, Palma), 91,75 punts

Tercer premi

Sebastià Galmés Alba (Col·legi Sant Josep Obrer I, Palma), 84 punts

Altres premis

Fernando Albillos Mayol (IES Joan Alcover, Palma), 83,75 punts
Xavier Garcia Llinás (IES Madina Mayurqa, Palma), 81,25 punts
Daniel Mañogil González (IES Llucmajor, Llucmajor), 81,25 punts
Roberto Rafael Maura Rivero (IES Joan Alcover, Palma), 80,75 punts
Lluis Pérez Palou de Comasema (IES Joan Alcover, Palma), 80,5 punts
Júlia Dols de la Portilla (Col·legi Sant Francesc Palma), 80 punts
Iago Arribas Castro (Colegio Nuestra Señora de Montesión Palma), 79,5 punts

Premis. País Valencià

Primer premi

Irene Melgarejo Lermas (IES Thader, Orihuela), 99.75 punts

Segon premi

Guillermo Martínez López (Pío XII, València), 96.5 punts

Tercer premi

Valentín Delgado Moll (IES Gregori Maians, Oliva), 92.25 punts

Altres premis

Wen Yi Sun (IES La Plana, Castelló de la Plana), 89 punts
Daniel Nieves Roldán (IES Thader, Orihuela), 88.75 punts
José Antonio Ferríz Beneito (IES Número 3, Villena), 87 punts
Rubén Sancho Portolés (IES Laurona, Llíria), 85 punts
Xavier Galiana Aguilar (IES Joan Fuster, Sueca), 84.75 punts
Ferran Gil Castellblanch (IES L'Eliana, L'Eliana), 84 punts
Alejandro Sánchez Aduna (IES Joan Coromines, Benicarló), 81.5 punts

XVII Cangur SCM Nivell 3

Solucions (15 de març de 2012)

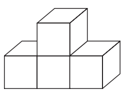
Qüestions de 3 punts

1. E. $8 - (8 : 8) + 8$.

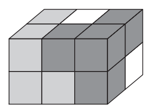
Si passem al llenguatge algebraic i substituïm el 8 per a, tindrem que l'opció A dóna $(a + a + a) : a = 3a : a = 3$, la B dóna $a + (a : a) - a = a + 1 - a = 1$, la C dóna $a : (a + a + a) = a : 3a = \frac{1}{3}$, la D dóna $a \cdot (a : a) : a = a \cdot 1 : a$ i la E dóna $a - (a : a) + a = a - 1 + a = 2a - 1$ que és, doncs, l'únic resultat que depèn del valor de a.

2. D. 9,999.

Només cal fer amb cura la resta $11{,}11 - 1{,}111$, començant amb l'observació que la xifra dels mil·lèsims ha de ser un 9.

3. D.  .

La figura ens fa veure que els tres cubs del darrere que estan a baix són tots blancs, i el del mig de dalt també.



4. C. 90 cm.

Si designem com A, M, T respectivament, les altures de l'Albert, en Miquel i la taula l'enunciat es tradueix en les dues equacions $A+T = M+80$ i $M+T = A + 100$. Si sumen les dues equacions obtenim $A + M + 2T = M + A + 180$ i si llevem $A + M$ dels dos costats tenim que $2T = 180$ i per tant $T = 90$.

5. A. 12 cm.

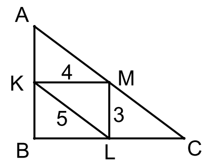
El quadrat $ABCE$ té àrea 16 cm^2. Perquè el triangle ECD també tingui àrea 16, com que la base $CE = 4$ cm, l'altura perpendicular a CE ha de mesurar 8 cm. La distància demanada és igual a la suma de l'altura del triangle més el costat del quadrat, $8 + 4 = 12$ cm.

6. A. 0.

Perquè la suma de set xifres sigui 6 forçosament alguna de les xifres serà 0. Per tant el producte d'aquestes xifres serà 0.

7. B. 12 cm.

La hipotenusa AC del triangle ABC fa 12 cm segons el teorema de Pitàgores. El teorema de Tales ens diu que els segments LM, MK i KL són paral·lels als costats AB, BC i CA i les seves longituds en són, respectivament, les meitats. Per tant el perìmetre demanat és $3 + 4 + 5 = 12$ cm.



8. E. 6.

El nombre tindrà l'esquema $X3XX$. Les tres xifres X, que han de sumar 3, poden ser 1 1 1 (dóna el nombre 1311), o bé 2 1 0 (que dóna quatre nombres, perquè el 0 no pot anar al primer lloc) o bé 3 0 0 (que dóna només un nombre). En total, 6 nombres.

9. D. 11.

En un dels dos triangles isòsceles en què es divideix el quadrilàter hi haurà el costat de 1 i la diagonal de 2. Perquè sigui un triangle isòsceles l'altre costat ha de ser de 2; no podria ser de 1 perquè els costats 1, 1 i 2 no formen triangle. En l'altre triangle isòsceles hi ha el costat de 4 i la diagonal de 2 i, doncs, l'altre costat ha de ser de 4, perquè 2, 2, 4 no formarien triangle.
Així doncs els costats del quadrilàter son 1, 2, 4 i 4. El perímetre és 11.

10. E. 19.

Els nombres $144 - 11 = 133$ i $220 - 11 = 209$ seran múltiples de x. Com que el màxim comú divisor de 133 i 209 és 19, aquest serà el nombre demanat. L'altre únic divisor comú de 133 i 209 és 1 i les divisions per 1 donen sempre residu 0, no 11 com demana l'enunciat.

Qüestions de 4 punts

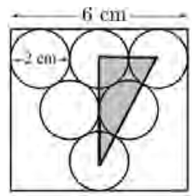
11. C. 100.

En l'expressió donada trobem 25 grups de quatre sumands consecutius de la forma $a^2 - (a+1)^2 - (a+2)^2 + (a+3)^2$. Per la fórmula de la diferència de quadrats els dos primers sumands donen $-2a-1$ i els dos segons $2a+5$. Com que $-2a-1+2a+5=4$ la suma demanada és $25 \cdot 4 = 100$.

12. B. 12.

Si en Daniel ha guanyat x vegades, la Maria n'haurà guanyat $30-x$. Si al principi en Daniel tenia d caramels, al final en tindrà $d + 3x - 2(30-x) = d + 5x - 60$. Si aquest valor ha de ser igual a d tenim que $x = 12$.
Naturalment també es compleix per a aquest valor de $x = 12$ que la Maria acaba amb els mateixos m caramels que havia començat:
$m + 2(30-12) - 3 \cdot 12 = m$.

13. A. $2\sqrt{3} - 2$.



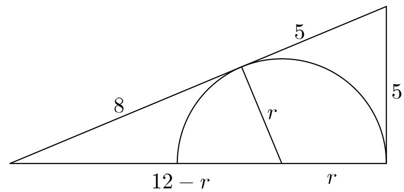
Observem que el diàmetre de cada cercle és 2 i, doncs el radi serà 1. En el triangle rectangle ombrejat a la figura la hipotenusa abasta 4 radis (mesura 4) i el catet de dalt abasta 2 radis (mesura 2). El teorema de Pitàgores ens diu que l'altre catet és $\sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Per obtenir la distància demanada hem de llevar dos radis de la longitud d'aquest catet.

14. E. Les tres menys un minut.

No poden ser les tres en punt perquè en un rellotge l'error seria de 6 minuts; no poden ser les tres menys tres minuts perquè un rellotge marcaria l'hora correctament; no poden ser les tres menys dos minuts ni les tres i un minut perquè en ambdós casos faria falta un error de 1 minut. Si són les 3 menys un minut els errors són de 5, 2, 3 i 4 minuts, respectivament, cosa que concorda amb l'enunciat.

15. B. $\dfrac{10}{3}$.

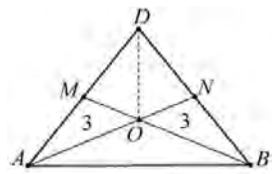
A la figura s'han marcat les distàncies que els punts de contacte amb el semicercle inscrit determinen en els costats, començant per l'observació que els dos segments de tangent des del vèrtex superior dret són iguals.



Si apliquem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle de catets r i 8 i hipotenusa $12 - r$ obtenim $r^2 + 64 = (12 - r)^2$, que ens dóna $r = \dfrac{10}{3}$.

16. D. 6.

Unim el punt D amb O. Es formen dos triangles DMO i DNO que, com que el triangle ADB és isòsceles, són iguals. L'àrea del triangle DMO és igual que l'àrea del triangle AMO ja que tenen la mateixa base ($AM = MD$, ja que M n'és el punt mitjà) i la mateixa altura (la distància del punt O al costat AD). Per tant àrea de $DMO =$ àrea de $DNO = 3$ i l'àrea del quadrilàter és 6.



17. B. 4.

Si indiquem com x el nombre que falta la primera columna, per suma de columnes deduïm quins seran els nombres que falten a la segona i a la tercera columna. Si ara igualem la primera fila i la segona fila veurem que al mig de la darrera columna hi ha d'anar un 6.

2	4	x+4	2
x	3	3	(6)
6	x+1	1	(x)

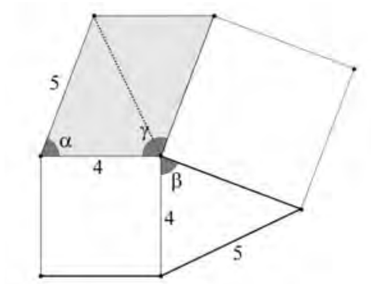
Ara comparem la primera i l'última columna i ens podem adonar que a la casella de baix a la dreta hi ha d'anar x. Fins aquí la segona fila suma $12 + x$ i la tercera suma $8 + 2x$. Només poden coincidir si $x = 4$.

18. D. Gu, Ret, Can .

Si tots tenen raó a partir de la primera afirmació podem descartar la resposta C. De la segona descartem la A ja que la C ja està descartada. De la tercera descartem la B. Només queden la D i la E i la quarta frase que diu «O bé en Gu o bé en Ret seran segon» i per tant només pot ser la D.

19. B. 16 cm^2.

Podem veure que la meitat del paral·lelogram és un triangle igual al donat. Observem que els dos triangles tenen dos costats iguals (4 i 5 coincidents amb els costats dels quadrats). Només cal veure la igualtat d'angles $\alpha = \beta$ que es dedueix de $\alpha+\gamma = 180°$ (angles d'un paral·lelogram) i $\beta + \gamma = 180°$ (completen una circumferència on hi ha dos angles rectes, els dels dos quadrats).



Per tant $\alpha = \beta$, els dos triangles són iguals i, doncs, l'àrea del paral·lelogram serà el doble de la del triangle donat.

20. D. 9.

Descomponem en factors: $2012 = 2^2 \cdot 503 = 2^2 \cdot (512 - 9) = 2^2 \cdot (2^9 - 9)$. Per tant $k = 9$.

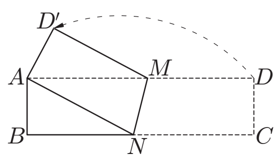
Qüestions de 5 punts

21. A. 8.

Enllacem vuit de les parelles amb les vuit anelles que obrim de les altres quatre parelles. Per tant n'hi ha prou amb obrir-ne vuit.

22. B. 47.

Tenim que $AM + MD = 16$ i per Pitàgores al triangle rectangle AMD', tenint en compte que $MD = MD'$ podem deduir que
$AM^2 = (16 - AM)^2 + 4^2$, d'on $AM = \dfrac{17}{2}$.



L'àrea de $ABNMD$ és l'àrea del rectangle menys l'àrea del triangle ANM que té base AM i altura AB, és a dir $\text{Àrea}(ABNMD) = 16\cdot 4 - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{17}{2}\cdot 4 = 47$.

23. A. G té doble llargada que H.

Si g és la llargada del tren G i h la del tren H, tenim $\dfrac{g}{8} = v_G$ i $\dfrac{h}{12} = v_H$ on v_G i v_H són les velocitats respectives dels dos trens.

Quan s'encreuen ho fan a una velocitat relativa que és la suma de les velocitats i recorren una llargada que és la suma de les llargades de cada tren: $g+h = 9\cdot(v_g+v_h)$. Tenim $g+h = 9\cdot(\frac{g}{8}+\frac{h}{12})$ d'on $g = 2h$.

---

24. C. 4.
$2^{59}\cdot 3^4\cdot 5^{53} = 2^{53}\cdot 5^{53}\cdot 2^4\cdot 3^4\cdot 2^2 = 10^{53}\cdot 6^4\cdot 4$ on veiem que les xifres diferents de zero seran les de $6^4\cdot 4$. Les potències de 6 acaben en 6, de manera que l'última xifra serà la de $6\cdot 4$ per tant 4.

---

25. C. 64.
Si el Cangur fa 13 salts visitarà 14 llocs comptant la posició inicial a l'escola i la final a casa. La seqüència serà:

E - P - E o B - P - E o B - P - ....P - E o B - C

O sigui que a part de la posició inicial i final visitarà 6 vegades el pati i 6 vegades l'escola o la biblioteca, de manera que les possibilitats són $2^6 = 64$.

---

26. A. És impossible que totes les làmpades estiguin enceses..
Assignem 0 a la posició de la làmpada apagada i 1 a la posició encesa. Si sumem els nombres de la posició inicial de les cinc làmpades obtenim 0. Cada vegada que accionem un interruptor efectuem dos canvis per tant la suma de les cinc posicions augmentarà en dues unitats si s'encenen dues làmpades apagades, quedarà igual si s'encén una i apaga una altra o disminuirà en dues unitats si s'apaguen dues. En tot cas com que comencem per 0 la suma de les posicions haurà de ser sempre un nombre parell, la qual cosa ens diu que és impossible que totes les làmpades quedin enceses perquè la suma de les posicions de les cinc làmpades donaria 5 que és imparell.
Les altres opcions no són correctes perquè:
• Si accionem les 10 vegades el mateix interruptor i l'altre que es canvia fos per sort sempre el mateix (possible malgrat que la probabilitat és molt petita) al cap de les 10 vegades estarien totes apagades com al principi. Per tant és possible que totes estiguin apagades.
• És clar que de cap manera podem afirmar que totes les làmpades estaran enceses perquè no és possible.
• Tampoc podem afirmar que totes les làmpades estaran apagades perquè si accionem un mateix interruptor les 9 primeres vegades quedarà encesa la làmpada sempre que l'última acció la fem en un altre interruptor i l'atzar deixi la làmpada de les 9 primeres vedades encesa.

---

27. C. 24.

Comencem posant el nombres 1, 2 i 3, de manera que la parella 2 i 3 ja és la que compleix la condició. Per tant els següents nombres han de ser múltiples dels anteriors. Si volem que siguin el més petits possibles: 6, 12, 24.

28. C. 45^3.

Del 100 al 110 no contribueixen a la suma. La suma dels productes de les xifres dels nombres del 111 al 119 serà $1+2+....+9 = 45$. La suma corresponent als nombres entre 120 i 129 (de fet el 120 ”no compta”) serà $2 \cdot 1+2 \cdot 2+...+2 \cdot 9 = 2 \cdot 45$ Així successivament podem veure que la suma corresponent als nombres entre 100 i 199 serà : $45 + 2 \cdot 45 + ... + 9 \cdot 45 = 45 \cdot (1 + ... + 9) = 45^2$ La suma corresponent als nombres entre 200 i 299 serà $2 \cdot 45^2$ i ja podem veure que la suma total serà $452 + 2 \cdot 45^2 + ... + 9 \cdot 45^2 = 45^2 \cdot (1 + ... + 9) = 45^3$.

29. B. La cinquena.

Per obtenir la suma de la segona columna a partir de la suma de la primera haurem de sumar les 14 unitats amb què incrementem les files i restar el nombre de la fila que queda buida, sumem $14 - 1$. Per obtenir la suma de la tercera haurem de sumar $13 - 3$, per a obtenir la suma de la quarta $12 - 6$, per a la cinquena $11 - 10$, per a la sisena $10 - 15$ per tant ja disminueix. O sigui que la suma més gran és la de la cinquena.

30. E. $\dfrac{5}{18}$.

Des d'A podem escollir sis punts per connectar i des de B sis més, per tant hi ha $6 \cdot 6 = 36$ maneres de dibuixar els dos segments. Si els segments es tallen tindrem quatre regions. Si tracem AH o BC tindrem com a molt dues regions (si fos AH i BC seria una regió). Per tant per tenir 3 regions:

- Si tracem AG, des de B podrem escollir G, F, E o D, quatre possibilitats.
- Si tracem AF, des de B podrem escollir F, E o D, tres possibilitats.
- Si tracem AE, tindrem dues possibilitats.
- Si tracem AD, només una, BD.

En total tenim $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ casos en què tindrem tres regions. Per tant la probabilitat serà $\dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.

XVII Cangur SCM Nivell 3

Solucions (22 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

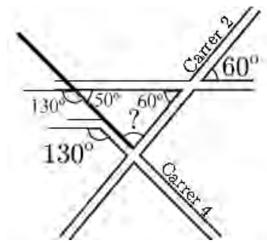
1. E. 18,108.

Només cal fer amb cura la resta 20,12 − 2,012, començant naturalment amb la xifra dels mil·lèsims, que ha de ser un 8, tot seguit la dels centèsims, que serà un 0, etc.

---

2. 3. 70°.

Si perllonguem el carrer 4 fins que talle el carrer 1 determinarem un angle de 130° per corresponents entre paral·leles i el seu suplementari és un angle del triangle que hem dibuixat. Un altre angle d'aquest triangle és oposat pel vèrtex al de 60° donat. L'angle demanat és el tercer d'aquest triangle: $180° - 60° - 50° = 70°$.



---

3. E. No és possible aconseguir el que diu el granger.

Si indiquem com c el nombre inicial de corders, coincident amb el de vaques, el nombre de vaques després de la compra serà $c + \dfrac{50}{100} \cdot c$, el nombre total d'animals $c + c + \dfrac{50}{100} \cdot c$ i el 30% d'aquesta quantitat és $\dfrac{30}{100}(c + c + \dfrac{50}{100} \cdot c) = \dfrac{75}{100} \cdot c$ i per tant la frase de l'enunciat "el nombre de corders serà exactament el 30% del total d'animals" no pot ser mai certa.

---

4. D. 8.

Si vull fer el mínim nombre d'accions caldrà que tregui quantes més vegades millor tres pedres del primer muntó i dues del segon, però de manera que, si així no he pogut acabar (com és el cas), després quedin el mateix nombre de pedres a cada muntó per poder-ne treure successivament una i una de cada muntó.

Els nombres enters m i n més grans que poden fer que $7-3m=10-2n$ són $m=1$ i $n=3$ i així, començo traient tres del primer muntó i tres vegades dues del segon muntó. En quedaran 4 en cada muntó. Per acabar trec quatre vegades una pedra de cada muntó. En total hauré fet $1+3+4=8$ accions.

---

5. A. 15 cm.

El quadrat $ABCE$ té àrea 25 cm^2. Perquè el triangle ECD també tingui àrea 25, com que la base $CE=5$ cm, l'altura perpendicular a CE ha de mesurar 10 cm. La distància demanada és igual a la suma de l'altura del triangle més el costat del quadrat, $10+5=15$ cm.

---

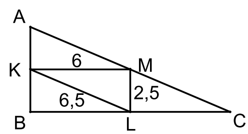
6. A. 0.

Perquè la suma de set xifres sigui 6 forçosament alguna de les xifres serà 0. Per tant el producte d'aquestes xifres serà 0.

---

7. D. 15 cm.

La hipotenusa AC del triangle ABC fa 13 cm segons el teorema de Pitàgores. El teorema de Tales ens diu que els segments LM, MK i KL són paral·lels als costats AB, BC i CA i les seves longituds en són, respectivament, les meitats.
Per tant el perímetre demanat és $2,5+6+6,5=15$ cm.



---

8. C. 3.

Siguin a, b i c els nombres que hi ha als vèrtexs de la cara que suma 6, de manera que b i c són a l'aresta comuna amb la cara que suma 7. El nombre que busquem serà a i el tercer nombre de la cara del 7 serà $a+1$. Les altres dues cares sumen $2a+b+1$ i $2a+c+1$ i no és cap restricció suposar $2a+b+1=8$ i $2a+c+1=9$.
Amb les tres condicions que tenim es dedueix $a=3$.

---

9. E. 23.

Els nombres $174-13=161$ i $266-13=253$ seran múltiples de x. Com que el màxim comú divisor de 161 i 253 és 23, aquest serà el nombre demanat. L'altre únic divisor comú de 161 i 253 és 1 i les divisions per 1 donen sempre residu 0, no 13 com demana l'enunciat.

---

10. D. Les quatre i dos minuts.

No poden ser les quatre menys 3 minuts perquè en un rellotge l'error seria de 11 minuts; no poden ser les quatre menys un minut ni les quatre en punt ni les quatre i tres minuts perquè en tots aquests casos faltaria a l'enunciat un error de 8 minuts. Si són les quatre i 2 minuts els errors són de 7, 5, 3 i 6 minuts, respectivament, cosa que concorda amb l'enunciat.

Qüestions de 4 punts

11. E. 60 cm.

Si designem com A, M, C respectivament, les altures de l'Albert, en Miquel i la cadira l'enunciat es tradueix en les dues equacions $A + C = M + 70$ i $M + C = A + 50$. Si sumen les dues equacions obtenim $A + M + 2C = M + A + 180$ i si llevem $A + M$ dels dos costats tenim que $2C = 120$ i per tant $C = 60$.

12. B. 12.

Si Maria ha guanyat x vegades, Daniel n'haurà guanyat $30 - x$. Si al principi Daniel tenia d caramels, al final en tindrà $d + 3(30 - x) - 2x = d + 90 - 5x$. Si aquest valor ha de ser igual a d tenim que $x = 18$.
Naturalment també es compleix per a aquest valor de $x = 18$ que Maria acaba amb els mateixos m caramels que havia començat: $m+3(30-18)-2\cdot 18 = m$.

13. D. 11.

En un dels dos triangles isòsceles en què es divideix el quadrilàter hi haurà el costat de 1 i la diagonal de 2. Perquè sigui un triangle isòsceles l'altre costat ha de ser de 2; no podria ser de 1 perquè els costats 1, 1 i 2 no formen triangle. En l'altre triangle isòsceles hi ha el costat de 4 i la diagonal de 2 i, doncs, l'altre costat ha de ser de 4, perquè 2, 2, 4 no formarien triangle. Així doncs els costats del quadrilàter son 1, 2, 4 i 4. El perímetre és 11.

14. D. 3.

No és possible que d'una fila o columna llevem quatre monedes perquè amb les altres dues no podríem acabar d'aconseguir que en totes les files i columnes quedés un nombre senar de monedes. Per tant totes les files i totes les columnes hauran de quedar amb 3 o amb 5 monedes.

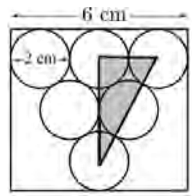
La figura mostra que es pot fer de manera que queden tres files (i tres columnes) amb tres monedes. . Si d'una fila hem llevat dues monedes forçosament hem de llevar moneda de les columnes corresponents, però les dues en diferent fila perquè altrament no aconseguiríem l'objectiu.

I per acabar hem de llevar moneda de les dues files que en tenen una fora i, en aquest cas, cal llevar-les les dues de la mateixa columna.

---

15. C. $2\sqrt{3} - 2$.

Observem que el diàmetre de cada cercle és 2 i, doncs el radi serà 1. En el triangle rectangle ombrejat a la figura la hipotenusa abasta 4 radis (mesura 4) i el catet de dalt abasta 2 radis (mesura 2). El teorema de Pitàgores ens diu que l'altre catet és $\sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Per obtenir la distància demanada hem de llevar dos radis de la longitud d'aquest catet.



---

16. D. 16.

Si indiquem com x el nombre que falta la primera columna, per suma de columnes deduïm quins seran els nombres que falten a la segona i a la tercera columna. Si ara igualem la primera fila i la segona fila veurem que al mig de la darrera columna hi ha d'anar un 6.

2	4	x+4	2
x	3	3	(6)
6	x+1	1	(x)

Ara comparem la primera i l'última columna i ens podem adonar que a la casella de baix a la dreta hi ha d'anar x. Fins aquí la segona fila suma $12 + x$ i la tercera suma $8 + 2x$. Només poden coincidir si $x = 4$ i aleshores la suma de cada fila és 16.

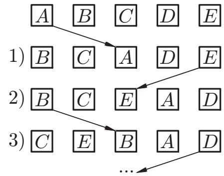
---

17. D. 6.

A partir del fet que $\dfrac{k+3}{k-3} = 1 + \dfrac{6}{k-3}$ observem que, perquè aquest nombre sigui enter, $k - 3$ ha de ser un divisor de 6, és a dir un nombre del conjunt $\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$, però com que k ha de ser positiu no hem de considerar el -6 i el -3. Queden 6 solucions que corresponen als valors de $k = 1, 3, 4, 6$ i 9. Observeu que l'enunciat no diu en cap moment que $k - 3$ hagi de ser positiu; només ho imposa per a k.

---

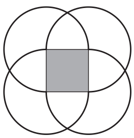
18. B.



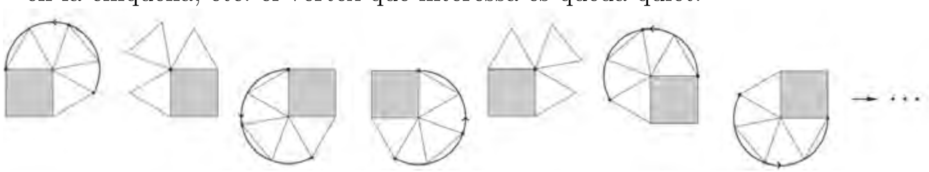
El primer que hem de fer és determinar en quin moment tornem a tenir la configuració inicial $ABCDE$. Cada dos passos fem una permutació de les lletres: la que estava en el primer lloc va a parar al quart, la que estava en el segon va parar al tercer, etc. Si fem cinc vegades aquesta operació (els dos passos), és a dir en el pas 10, aleshores obtenim la configuració inicial.

El mateix tindrem en el pas 2010. Per tant, el resultat en el pas 2012 és el mateix que en el pas número 2. La carta a l'esquerra del tot és la B.

---

19. A.  .

La imatge següent mostra les primeres rotacions. Observeu que en la segona, en la cinquena, etc. el vèrtex que interessa es queda quiet.



Si aneu continuant sistemàticament els girs i observeu la cadència de la línia que descriu el vèrtex veureu que la solució és la indicada.

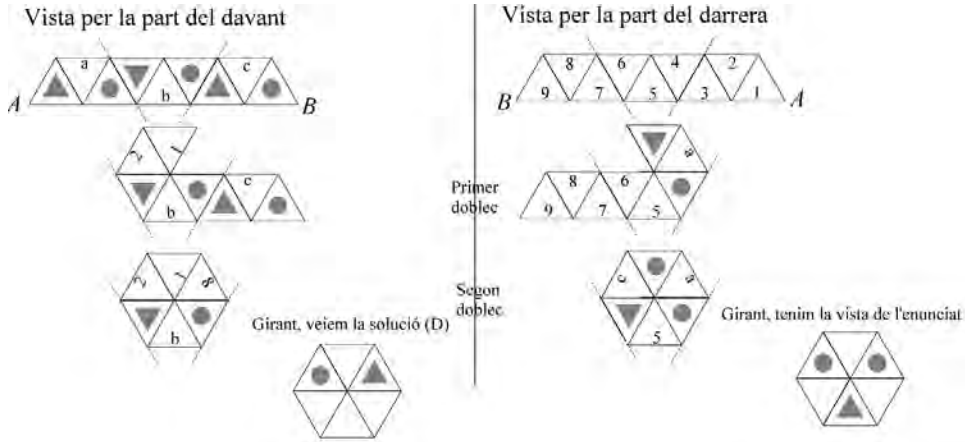
---

20. B. 9.

Descomponem en factors: $2012 = 2^2 \cdot 503 = 2^2 \cdot (512 - 9) = 2^2 \cdot (2^9 - 9)$. Per tant $k = 9$.

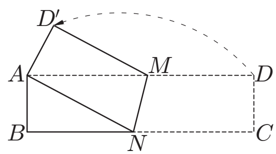
Qüestions de 5 punts

21. D.



22. A. 17.

Tenim que $AM + MD = 16$ i per Pitàgores al triangle rectangle AMD', tenint en compte que $MD = MD'$ podem deduir que $AM^2 = (16 - AM)^2 + 4^2$, d'on $AM = \dfrac{17}{2}$.



L'àrea del triangle ANM, com que té base AM i altura AB serà $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{17}{2}\cdot 4 = 17$.

23. D. 7.

El criteri de la divisibilitat per 9 es dedueix del fet que el residu de la divisió d'un nombre per 9 és el mateix que el residu de la divisió de la suma de les xifres del nombre per 9.

La suma de les xifres de $\underbrace{\underbrace{2012}\ldots\underbrace{2012}}_{2.012 \text{ vegades}}$ és $2012 \cdot 5 = 10060$ que, dividit per 9, dóna de residu 7.

24. A. G **té doble llargada que** H.

Si g és la llargada del tren G i h la del tren H, tenim $\dfrac{g}{8} = v_G$ i $\dfrac{h}{12} = v_H$ on v_G i v_H són les velocitats respectives dels dos trens.

Quan s'encreuen ho fan a una velocitat relativa que és la suma de les velocitats i recorren una llargada que és la suma de les llargades de cada tren: $g + h = 9 \cdot (v_g + v_h)$. Tenim $g + h = 9 \cdot (\frac{g}{8} + \frac{h}{12})$ d'on $g = 2h$.

---

25. C. 64.

Si el Cangur fa 13 salts visitarà 14 llocs comptant la posició inicial a l'escola i la final a casa. La seqüència serà:

E - P - E o B - P - E o B - P - ....P - E o B - C

O sigui que a part de la posició inicial i final visitarà 6 vegades el pati i 6 vegades l'escola o la biblioteca, de manera que les possibilitats són $2^6 = 64$.

---

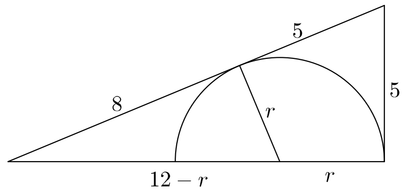
26. C. És impossible que tots els llums estiguin encesos..

Assignem 0 a la posició "llum apagat" i 1 a la posició "llum encés". Si sumem els nombres de la posició inicial dels cinc llums obtenim 0. Cada vegada que accionem un interruptor efectuem dos canvis per tant la suma de les cinc posicions augmentarà en dues unitats si s'encenen dos llums que estaven apagats, quedarà igual si s'encén una i apaga una altra o disminuirà en dues unitats si s'apaguen dues. En tot cas, com que comencem per 0, la suma de les posicions haurà de ser sempre un nombre parell, la qual cosa ens diu que és impossible que tots els llums quedin encesos perquè la suma de les posicions dels cinc llums donaria 5 que és imparell.
Les altres opcions no són correctes perquè:
• Si accionem les 10 vegades el mateix interruptor i l'altre que es canvia fos per sort sempre el mateix (possible però amb una probabilitat molt menuda) després de les 10 vegades estarien tots els llums apagats com al principi. Per tant és possible que tots estiguin apagats.
• És clar que de cap manera podem afirmar que tots els llums estiguin encesos perquè no és possible.
• Tampoc podem afirmar que tots els llums estaran apagats perquè si accionem un mateix interruptor les 9 primeres vegades quedarà encés aquell llum sempre que l'última acció la fem en un altre interruptor i l'atzar deixi el llum de les 9 primeres vedades encés.

---

27. B. $\frac{10}{3}$.

A la figura s'han marcat les distàncies que els punts de contacte amb el semicercle inscrit determinen en els costats, començant per l'observació que els dos segments de tangent des del vèrtex superior dret són iguals.



Si apliquem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle de catets r i 8 i hipotenusa $12 - r$ obtenim $r^2 + 64 = (12 - r)^2$, que ens dóna $r = \frac{10}{3}$.

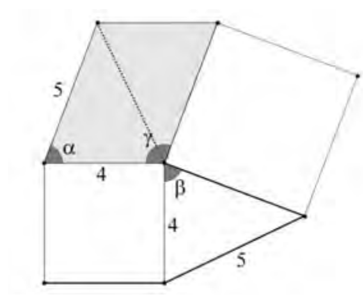
28. C. 8.

Hem de recordar que cada costat d'un triangle ha de ser més petit que la suma dels altres dos i més gran que la seua diferència. Aleshores:

- No hi pot haver un costat de 1, perquè caldria completar-ho $1 + 9 + 10$ o bé $1 + 8 + 11$ o altres possiblitats que no permeten formar triangle.
- Si un costat fa 2 només es pot compeltar amb $2 + 9 + 9$
- Si el costat menor fa 3, trobem el triangle $3 + 8 + 9$
- Si és 4, tenim els triangles $4 + 7 + 9$ i $4 + 8 + 8$
- Finalment, si el costat menor és 5 podem comptar $5 + 6 + 9$ i $5 + 7 + 8$
- No és possible que el costat menor sigui de 6 o més.

29. B. 16 cm^2.

Podem veure que la meitat del paral·lelogram és un triangle igual al donat. Observem que els dos triangles tenen dos costats iguals (4 i 5 coincidents amb els costats dels quadrats). Només cal veure la igualtat d'angles $\alpha = \beta$ que es dedueix de $\alpha + \gamma = 180°$ (angles d'un paral·lelogram) i $\beta + \gamma = 180°$ (completen una circumferència on hi ha dos angles rectes, els dels dos quadrats).



Per tant $\alpha = \beta$, els dos triangles són iguals i, doncs, l'àrea del paral·lelogram serà el doble de la del triangle donat.

30. D. La cinquena.

Observem que en la taula

1								
2	3							
4	5	6						
7	8	9	10					
11	12	13	14	15				
...	...	...	...	...	...			
....	....	....	....	....	....	....	....	
172	173	174	175	176	177	178	....	190

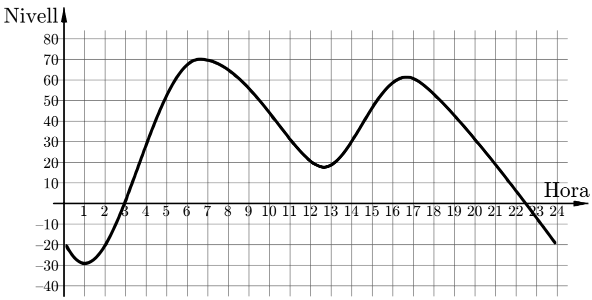
per obtenir la suma de la segona columna a partir de la suma de la primera haurem de sumar les 18 unitats amb què incrementem les files i restar el nombre de la fila que queda buida, estem sumant $18 - 1$.
Per obtenir la suma de la tercera haurem de sumar $17 - 3$, per a obtenir la suma de la quarta $16 - 6$, per a la cinquena $15 - 10$, per a la sisena $14 - 15$, per tant ja disminueix. O sigui que la suma més gran és la de la cinquena.

XVII Cangur SCM Nivell 4

Enunciats (15 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

1. A Venècia, a causa de la marea, el nivell de l'aigua varia durant el dia, pujant i baixant. Al gràfic es pot veure el nivell de l'aigua (respecte d'un cert nivell 0) al llarg del dia 6 de maig de 2011. Durant quantes hores el nivell de l'aigua va estar per sobre de 30 cm?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 13

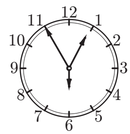
2. Quants zeros hi ha al final del número $2^{22}\ 3^{33}\ 5^{55}\ 7^{77}$?

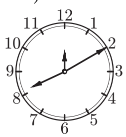
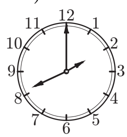
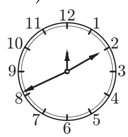
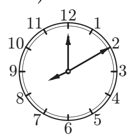
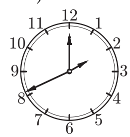
A) 22 B) 33 C) 55 D) 77 E) No n'hi ha cap.

3. En una llista de cinc nombres, el primer és 2 i l'últim és 12. El producte dels tres primers és 30, el producte dels tres del mig és 90 i el producte dels tres darrers és 360. Quin nombre hi ha al centre de la llista?

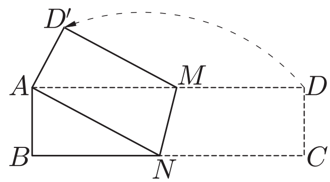
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 10

4. Un rellotge té tres busques de longituds diferents, per a les hores, els minuts i els segons. No sabem què senyala cada busca, però sabem que el rellotge funciona bé. A les 12:55:30 les busques eren a la posició que es veu a la dreta. En quina posició estaran les busques a les 8:10:00?



A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

5. Un rectangle de paper $ABCD$ de 4 cm $\times$ 16 cm es doblega sobre la línia MN, de manera que el vèrtex C coincideix amb el vèrtex A, com es veu al dibuix. Quina és l'àrea del quadrilàter $ANMD'$?



A) 28 cm^2 B) 30 cm^2 C) 32 cm^2 D) 48 cm^2 E) 56 cm^2

6. Si sumem les xifres d'un nombre de nou xifres dóna 8. Quant donarà el producte d'aquestes nou xifres?

A) 0 B) 1 C) 8 D) 9 E) 9!

7. El valor més gran de n, enter i positiu, que satisfà la desigualtat $n^{200} < 5^{300}$ és:

A) 5 B) 6 C) 8 D) 11 E) 12

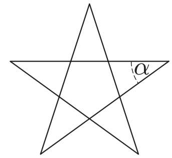
8. Quina de les funcions següents satisfà la condició $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{f(x)}$, per a tot $x \neq 0$?

A) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ B) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ C) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$
D) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ E) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

9. Un nombre real x satisfà les desigualtats $x^3 < 64 < x^2$. Quina de les afirmacions següents és certa?

A) $0 < x < 64$ B) $-8 < x < 4$ C) $x > 8$
D) $-4 < x < 8$ E) $x < -8$

10. Quant mesura l'angle α de l'estrella regular de cinc puntes de la figura?



A) $24°$ B) $30°$ C) $36°$ D) 45 E) $72°$

Qüestions de 4 punts

11. La meva edat és un nombre de dues xifres potència de 5, i la del meu veí és un nombre també de dues xifres però potència de 2. La suma de les quatre xifres de les nostres edats és un nombre senar. Quin és el producte d'aquestes quatre xifres?

A) 240 B) 2010 C) 60 D) 50 E) 300

12. Durant un creuer pel Mediterrani s'organitzen quatre visites opcionals, i a cadascuna de les sortides hi va un 80 % dels passatgers. Quin és el percentatge més petit possible de passatgers que ha anat a totes les sortides?

A) 80 % B) 60 % C) 40 % D) 20 % E) 16 %

13. El conjunt de solucions de la inequació $|x| + |x - 3| > 3$ és:

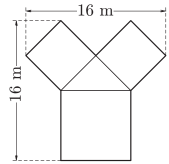
A) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ B) $(-3, 3)$ C) $(-\infty, -3)$ D) $(-3, +\infty)$

E) Tots els nombres reals

14. A les escoles d'Eslovàquia es puntuen les activitats dels alumnes de l'1 al 5, on l'1 és la millor qualificació i 5 és la pitjor. En una d'aquestes escoles una prova no ha anat gaire bé i la mitjana ha estat de 4. Els nois tenen una mitjana de 3,6 i les noies una mitjana de 4,2. Quina de les afirmacions següents és certa?

A) Hi ha el doble de nois que de noies.
B) Hi ha quatre vegades més nois que noies.
C) Hi ha el doble de noies que de nois.
D) Hi ha quatre vegades més noies que nois.
E) Hi ha tants nois com noies.

15. Al dibuix es pot veure l'esquema d'un jardí. Als quadrats iguals s'ha plantat roses blanques, i al quadrat gran, roses vermelles. Al triangle rectangle que es veu al dibuix s'ha plantat roses grogues. Quina àrea té la regió plantada de roses?



A) 114 m^2 B) 130 m^2 C) 144 m^2 D) 160 m^2 E) 186 m^2

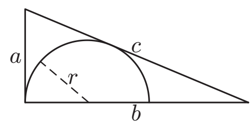
---

16. El caixer d'un cinema ha venut totes les entrades de la primera fila, numerades consecutivament a partir de l'1. Per equivocació, ha venut una mateixa entrada dos cops. La suma dels nombres de les entrades venudes és 857. Quina és l'entrada que ha venut dos cops?

A) 4 B) 16 C) 25 D) 37 E) 42

---

17. Tenim un triangle rectangle de costats a, b i c. El radi del semicercle inscrit que es veu al dibuix és:



A) $\dfrac{a(c-a)}{2b}$ B) $\dfrac{ab}{a+b+c}$ C) $\dfrac{ab}{b+c}$ D) $\dfrac{2ab}{a+b+c}$ E) $\dfrac{ab}{a+c}$

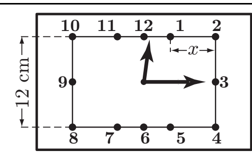
---

18. Els costats d'un quadrat $ABCD$ fan 2 m. E i F són els punts mitjans dels segments AB i AD, respectivament. G és un punt sobre el segment CF, de manera que $3CG = 2GF$. L'àrea del triangle BEG és:

A) $\dfrac{7}{10}$ B) $\dfrac{4}{5}$ C) $\dfrac{8}{5}$ D) $\dfrac{3}{5}$ E) $\dfrac{6}{5}$

---

19. Un rellotge de paret és rectangular, com es veu al dibuix. Quina és, en centímetres, la distància x entre les posicions del número 1 i el número 2 si la distància entre el 8 i el 10 és de 12 cm?



A) 6 B) $2\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $2+\sqrt{3}$ E) $12-3\sqrt{3}$

---

20. Un cangur ha fet una fila de daus (dels estàndard, on cada parell de cares oposades suma 7), enganxant un dau amb el següent, de manera que les cares que s'uneixen tenen la mateixa puntuació. Quants daus necessitarà per a fer una fila on la suma de les cares que no estan enganxades sigui 2012?

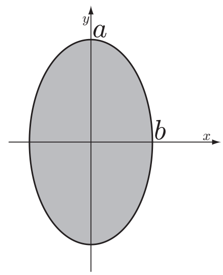
A) 70 B) 71 C) 142 D) 143 E) És impossible que sumin 2012.

Qüestions de 5 punts

21. Alguns triangles isòsceles tenen la propietat que una mitjana els divideix en dos triangles que també són isòsceles. Quin és l'angle més petit que pot tenir un triangle amb aquesta propietat?

A) 15° B) 22,5° C) 30° D) 36° E) 45°

22. En l'el·lipse del dibuix, $a > b$. Si la girem al voltant de l'eix x, obtenim l'el·lipsoide E_x, que té volum V_x, i si la rotem al voltant de l'eix y, obtenim l'el·lipsoide E_y, que té volum V_y. Quina de les afirmacions següents és correcta?

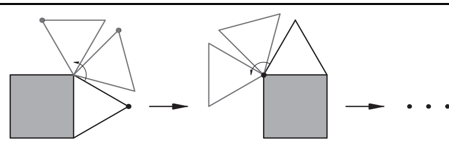


A) $E_x \neq E_y$ i $V_x > V_y$
B) $E_x = E_y$ però $V_x \neq V_y$
C) $E_x = E_y$ i $V_x = V_y$
D) $E_x \neq E_y$ i $V_x < V_y$
E) $E_x \neq E_y$ però $V_x = V_y$

23. En una fracció podem fer dos tipus d'operacions: 1) sumar 8 al numerador, 2) sumar 7 al denominador. Després de fer n operacions d'algun d'aquests dos tipus, la fracció 7/8 s'ha transformat en una fracció equivalent a 7/8 altra vegada. Quin és el mínim valor possible de n?

A) 56 B) 81 C) 109 D) 113 E) Això és impossible.

24. Un triangle equilàter es desplaça al voltant d'un quadrat de costat 1, com indica el dibuix. Quina és la llargada del camí que ha seguit el punt marcat fins que tant el triangle com el punt han arribat altra vegada a la posició de partida?



A) 4π B) $\frac{28}{3}\pi$ C) 8π D) $\frac{14}{3}\pi$ E) $\frac{21}{2}\pi$

25. Quantes permutacions (x_1, x_2, x_3, x_4) del conjunt $\{1, 2, 3, 4\}$ tenen la propietat que la suma $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ és divisible per 3?

A) 8 B) 12 C) 14 D) 16 E) 24

26. En acabar la classe de matemàtiques ha quedat dibuixada a la pissarra la paràbola $y = x^2$ i 2012 rectes paral·leles a la recta $y = x$, de manera que cadascuna d'elles talla la paràbola en dos punts. Quant val la suma dels valors de les abscisses x de tots aquests punts?

A) 0 B) 1 C) 1006 D) 2012 E) És impossible de determinar.

---

27. Tres vèrtexs d'un cub, no tots de la mateixa cara, són $P = (3, 4, 1)$, $Q = (5, 2, 9)$ i $R = (1, 6, 5)$. Quin punt és el centre del cub?

A) $A = (4, 3, 5)$ B) $B = (2, 5, 3)$ C) $C = (3, 4, 7)$
D) $D = (3, 4, 5)$ E) $E = (2, 3, 5)$

---

28. En la successió 1, 1, 0, 1, -1, ... els primers dos elements a_1 i a_2 són 1. El tercer element és la resta dels dos anteriors, $a_3 = a_1 - a_2$; el quart és la suma dels dos anteriors, $a_4 = a_2 + a_3$. Llavors $a_5 = a_3 - a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$ i així successivament. Quant val la suma dels 100 primers elements d'aquesta successió?

A) 0 B) 3 C) -21 D) 100 E) -1

---

29. La Joana tria dos nombres a i b del conjunt $\{1, 2, 3, \ldots, 26\}$. El producte ab és el mateix que la suma dels altres 24 nombres. Quant val $|a - b|$?

A) 10 B) 9 C) 7 D) 2 E) 6

---

30. Cada gat del País de les Meravelles és savi o és boig. Si en una habitació coincideixen tres gats bojos i un gat savi, aquest es torna boig. Si en una habitació coincideixen un gat boig i tres gats savis, aquests descobreixen que l'altre és boig. Tres gats van entrar, l'un darrera l'altre, en una habitació buida. A continuació va entrar-hi un quart gat i una mica després el primer en va sortir. Després va entrar un cinquè gat a l'habitació i al cap de poc en va sortir el segon; i així successivament. Tot i que per l'habitació ja havien passat alguns gats bojos, va ser en el moment que va entrar el 2012è gat quan per primer cop es va descobrir un gat boig. Quins d'aquests gats podrien ser bojos quan van entrar a l'habitació?

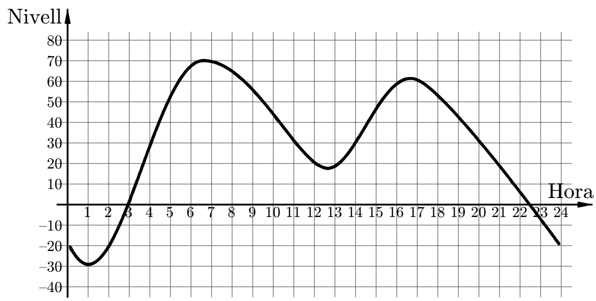
A) El 1r i el 2011è
B) El 2n i el 2010è
C) El 3r i el 2009è
D) El 4t i l'últim
E) El 2n i el 2011è

XVII Cangur SCM Nivell 4

Enunciats (22 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

1. A Venècia, a causa de la marea, el nivell de l'aigua varia durant el dia, pujant i baixant. Al gràfic es pot veure el nivell de l'aigua (respecte d'un cert nivell 0) al llarg del dia 6 de maig de 2011. Durant quantes hores el nivell de l'aigua va estar per sobre de 30 cm?



A) 13 B) 9 C) 7 D) 6 E) 5

1

---

2. $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}$ és igual a

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt[6]{9}$ D) $\sqrt[3]{9}$ E) 3

---

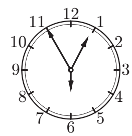
3. En una llista de nombres, el primer nombre és 3 i el darrer és 15. El producte dels tres primers és 54, el producte dels tres del mig és 90 i el producte dels tres darrers és 225. Quin nombre hi ha al mig de la llista?

3				15

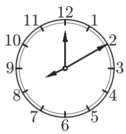
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

---

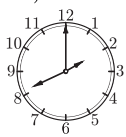
4. Un rellotge té 3 agulles de diferents longituds (per a les hores, minuts i segons). No sabem què senyala cada agulla, però sabem que el rellotge funciona bé. A les 12:55:30 les agulles eren a la posició que es veu a la dreta. En quina posició estaran les agulles a les 8:10:00?



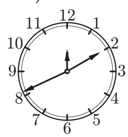
A)



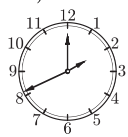
B)



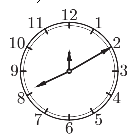
C)



D)



E)



---

5. De quantes maneres diferents pot ser dividit el conjunt $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ en dos subconjunts, de manera que la suma dels elements d'aquests dos subconjunts siga la mateixa?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

---

6. Si sumem les xifres d'un nombre de vuit xifres dóna 7. Quant donarà el producte d'estes vuit xifres?

A) 8 B) 7 C) 1 D) 0 E) 8!

---

7. Quants zeros hi ha al final del número $2^{12}\ 3^{13}\ 5^{15}\ 7^{17}$?

A) 12 B) 13 C) 15 D) 17 E) 19

---

8. Quina de les funcions següents compleix l'equació $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$?

A) $f(x) = \frac{3}{x^2}$ B) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ C) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

D) $f(x) = 2 + \frac{2}{x^2}$ E) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

---

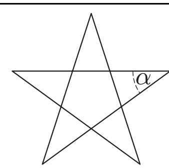
9. Un determinat nombre real x satisfà la desigualtat $x^3 < 64 < x^2$. Quina de les afirmacions següents és certa?

A) $0 < x < 64$ B) $-8 < x < 4$ C) $x > 8$

D) $-4 < x < 8$ E) $x < -8$

---

10. Quant mesura l'angle α de l'estrella regular de cinc puntes de la figura?



A) 30° B) 36° C) 72° D) 45° E) 24°

Qüestions de 4 punts

11. La meva edat és un nombre de dues xifres potència de 5, i la del meu veí, un nombre també de dues xifres però potència de 2. La suma de les quatre xifres de les nostres edats és un nombre senar. Quin és el producte d'aquestes quatre xifres?

A) 2.010 B) 300 C) 240 D) 60 E) 50

12. Durant un creuer pel Mediterrani s'organitzen quatre visites opcionals, i a cadascuna de les sortides hi va un 80% dels passatgers. Quin és el percentatge més petit possible de passatgers que ha anat a totes les sortides?

A) 16% B) 20% C) 40% D) 60% E) 80%

13. El conjunt de solucions de la inequació $|x| + |x-5| > 5$ és:

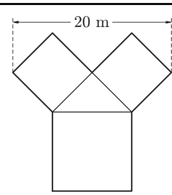
A) Tots els nombres reals B) $(-5, 5)$ C) $(-\infty, -5)$ D) $(5, +\infty)$

E) $(-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$

14. La nota mitjana d'un examen a una classe de segon de batxillerat ha estat de 8. Les xiques han tret de mitjana un 8,2 i els xics un 7,6. Quina de les frases següents és correcta?

A) Hi ha el triple de xics que de xiques.
B) Hi ha el doble de xics que de xiques.
C) Hi ha el triple de xiques que de xics.
D) Hi ha el doble de xiques que de xics.
E) Hi ha tantes xiques com xics.

15. En el dibuix es pot veure l'esquema d'un jardí. En els quadrats iguals, s'hi han plantat roses blanques, i en el quadrat gran, roses roges. En el triangle rectangle que es veu en el dibuix, s'hi han plantat roses grogues. A partir de la distància coneguda, marcada en la la figura, calculeu quant mesura l'àrea total plantada de roses.



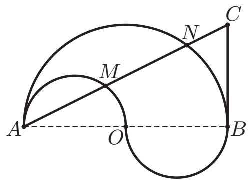
A) 100 m^2 B) 225 m^2 C) 275 m^2 D) 250 m^2 E) 150 m^2

16. El caixer d'un cinema ha venut totes les entrades de la primera fila, numerades consecutivament a partir de l'1. Per equivocació, ha venut una mateixa entrada dos cops. La suma dels nombres de les entrades venudes, inclosa la repetida, és 845. Quina és l'entrada que ha venut dos cops?

A) 4 B) 16 C) 25 D) 37 E) 42

---

17. La caputxeta vermella, A, es disposa a visitar la seua iaia, B. En els punts on els camins s'encreuen, pot canviar de camí. Empreu el diagrama per ajudar-la a trobar el camí més curt. (Noteu que AO és el radi del cercle major, $AO = CB = 1$ i CB és perpendicular a AB).



A) Arc ANB
B) Arc AO més arc OB
C) Segment AC més segment CB
D) Segment AN més arc NB
E) Segment AM més arc MO més arc OB

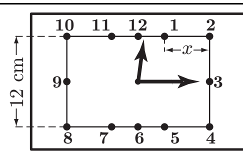
---

18. Els costats d'un quadrat $ABCD$ mesuren 2 m. E i F són els punts mitjans dels segments AB i AD respectivament. G és un punt sobre el segment CF, de manera que $3CG = 2GF$. L'àrea del triangle BEG és:

A) $\dfrac{7}{10}$ B) $\dfrac{4}{5}$ C) $\dfrac{8}{5}$ D) $\dfrac{3}{5}$ E) $\dfrac{6}{5}$

---

19. Un rellotge de paret és rectangular, com es veu en el dibuix. Quina és la distància x entre les posicions del número 1 i el número 2 si la distància entre el 8 i el 10 és de 12 cm?



A) 6 B) $2\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $2+\sqrt{3}$ E) $12-3\sqrt{3}$

---

20. Quins dels punts següents de la forma (x, y) pertanyen a la gràfica de la funció lineal $y = bx + 1$ si b és qualsevol nombre real diferent de 0?

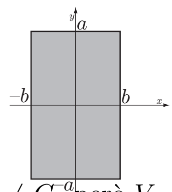
A) $(0,1)$ i $(\frac{1}{b},0)$ B) $(0,b)$ i $(-\frac{1}{b},0)$ C) $(0,1)$ i $(b,0)$
D) $(0,1)$ i $(-\frac{1}{b},0)$ E) $(0,-\frac{1}{b})$ i $(1,0)$

Qüestions de 5 punts

21. Mariola busca els nombres de la sort entre els nombres de dues xifres. Multiplica els dígits un per l'altre i si el resultat encara té 2 xifres els torna a multiplicar. Repeteix açò fins que obté un nombre d'una sola xifra. Els nombres de la sort són aquells que donen zero com a resultat. Quants són els nombres de la sort de Mariola?

A) 9 B) 17 C) 20 D) 24 E) 27

22. En la figura es mostra un rectangle amb $a > b$. Si girem el rectangle al voltant de l'eix X, obtenim el cilindre C_x de volum V_x. Si el girem al voltant de l'eix Y, obtenim el cilindre C_y de volum V_y. Quina de les afirmacions següents és vertadera?

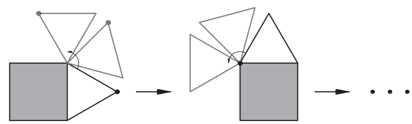


A) $C_x \neq C_y$ i $V_x < V_y$ B) $C_x \neq C_y$ i $V_x > V_y$ C) $C_x \neq C_y$ però $V_x = V_y$
D) $C_x = C_y$ i $V_x = V_y$ E) $C_x = C_y$ però $V_x \neq V_y$

23. En una fracció es fan dos tipus d'operacions: 1) sumar 8 al numerador, 2) sumar 7 al denominador. Després de fer n operacions d'algun d'aquests dos tipus, la fracció 7/8 s'ha transformat en una fracció equivalent altra vegada a 7/8. Quin és el mínim valor possible de n?

A) 56 B) 81 C) 109 D) 113 E) Això és impossible.

24. Un triangle equilàter es desplaça al voltant d'un quadrat de costat 1, com indica el dibuix. Quina és la llargada del camí que ha seguit el punt marcat fins que tant el triangle com el punt han arribat altra vegada a la posició de partida?

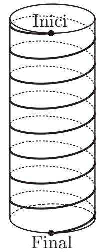


A) 4π B) $\dfrac{28}{3}\pi$ C) 8π D) $\dfrac{14}{3}\pi$ E) $\dfrac{21}{2}\pi$

25. En acabar la classe de matemàtiques ha quedat dibuixada en la pissarra la paràbola $y = x^2$ i 2012 rectes paral·leles a la recta $y = x$, de manera que cadascuna d'elles talla la paràbola en dos punts. Quant sumen els valors de les coordenades x de tots aquests punts?

A) 0 B) 1 C) 1.006 D) 2.012 E) No es pot determinar.

26. En l'exuberant corona d'un vell arbre amb una circumferència d'1 m, una família d'esquirols té el seu niu a 15 m sobre el terra. Avui Joanet, l'esquirol més jovenet, fa pràctiques per a arribar al terra corrent pel tronc. Les instruccions del seu pare són: «Exercici 1: sempre amb el mateix angle respecte del terra, 8 voltes al voltant del tronc, velocitat constant», mentre li mostra a Joanet el dibuix de la dreta. A Joanet aquest camí li sembla molt més llarg que córrer cap avall del tronc verticalment. Quants metres més fa de llarg?



A) 1 m B) 2 m C) 3 m D) 4 m E) 5 m

---

27. El producte P de tots els divisors d'un nombre N (inclosos l'1 i l'N) acaba exactament en 36 zeros. Quin és el nombre màxim de zeros amb què pot acabar el nombre N?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) Un nombre parell, més gran que 2

Nota: versió modificada per evitar possibles duplicitats que es donaven en la interpretació de l'enunciat, cosa que va fer anul·lar el problema en el Cangur del dia 22 de març.

---

28. Quantes solucions té el sistema d'equacions següent?

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

A) Cap B) 1 C) 2 D) 4 E) 8

---

29. Ariadna tria dos nombres a i b del conjunt $\{1, 2, \ldots, 17\}$. El producte ab és igual que la suma dels 15 nombres restants. Quin és el valor de $|a - b|$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

---

30. Cada gat del País de les Meravelles és savi o és boig. Si en una habitació coincideixen tres gats bojos i un gat savi, aquest es torna boig. Si en una habitació coincideixen un gat boig i tres gats savis, els savis descobreixen que l'altre és boig. Tres gats entren, l'un darrere l'altre, en una habitació buida. A continuació hi entra un quart gat, i una mica més tard el primer en surt. Després entra un cinquè gat a l'habitació i, al cap de poc, en surt el segon; i així successivament. Tot i que per l'habitació ja han passat alguns gats bojos, en el moment en què entra el 2012è gat és quan es descobreix per primer cop un gat boig. Quins d'aquests gats poden ser bojos quan entren a l'habitació?

A) El 1r i el 2011è B) El 2n i el 2011è C) El 3r i el 2009è
D) El 2n i el 2010è E) El 4t i l'últim

Premis. Balears

Primer premi
Ramón Moreno Macarrilla (IES Madina Mayurqa, Palma), 100 punts
Segon premi
Enric Alcover Comas (IES Madina Mayurqa, Palma), 96 punts
Tercer premi
Andreu Cabrer Company (La Salle, Palma), 88 punts
Altres premis
Albert Marqués Triay (IES Maria Àngels Cardona, Ciutadella), 85 punts
ex aequo Feng Ma (IES Ses Estacions, Palma) i
Feliu Serra Burriel (IES Madina Mayurqa, Palma), 83 punts
Juan José Garau Luis (IES Joan Alcover, Palma), 80,25 punts
ex aequo Simon Abellan Cardona (IES Joan Ramis i Ramis, Maó) i
Enchong Liu (IES Ses Estacions, Palma), 80 punts
Antonio López-Mateos Chico (Ntra. Sra. de Montesión, Palma), 78,5 punts

Premis. País Valencià

Primer premi
David Pardo Simón (IES Thader, Orihuela), 117.25 punts
Segon premi
Roberto Alegre Usach (IES La Serrania, Villar del Arzobispo), 107.5 punts
Tercer premi
Óscar Roldán Blay (IES Fancesc Ferrer i Guàrdia, València), 107 punts
Altres premis
José Israel Sánchez García (IES A. Navarro Santafé, Villena), 105 punts
Celia Traver Abella (IES Ramon Cid, Benicarló), 103 punts
Jorge Pallarés Soler (IES Ximen d'Urrea, L'Alcora), 97.5 punts
ex aequo, Iamil Ferrer Pomer (IES La Plana, Castelló de la Plana) i
Nicolás Blasco Arnanz (IES Vicent Sos Baynat, Castelló de la Plana), 97 punts
Jesús Hernández Escavy (M. Vedruna Sdo. Corazón, Castelló P.), 95.5 punts
Jaime Ferrer Velasco (IES Vicent Sos Baynat, Castelló de la Plana), 95.25 punts

Premis i mencions. Catalunya i Andorra

Primer premi

Darío Nieuwenhuis Nivela (Aula Escuela Europea, Barcelona), 124,75 punts

Premis per al pòdium

Jaume De Dios Pont (Tecnos, Terrassa), 121,25 punts
Joan Prunera Olivé (Institut Escola Industrial, Sabadell), 107 punts

Premis de categoria A

ex aequo Victor Ortiga Villagrasa (Institut Torre del Palau, Terrassa) i
Harold Sagel (Institut Jaume Vicens Vives, Girona), 101,25 punts

Premis de categoria B

Gerard Moreno Giménez (Institut Martí l'Humà, Montblanc), 101 punts
Joan Roca Carreras (Institut Jaume Vicens Vives, Girona), 100,75 punts
Arnau Martínez Escubedo (Sant Jaume de la FEP, L'Hospitalet), 100 punts

Premis de categoria C

Marc Sánchez Alfonso (Sant Ignasi, Barcelona), 99,5 punts
Eric Milesi Vidal (Pare Manyanet, Barcelona), 99,25 punts
Xavier Cabanes Bosacoma (Institut Maragall, Barcelona), 98,5 punts

Premis de categoria D

Aitor Azemar Carnicero (Institut Arnau Cadell, Sant Cugat), 97,5 punts
ex aequo Jordi Barceló Mercader (Jesús Maria, Barcelona) i
Francesc Xavier Gispert Sánchez (Montessori-Palau, Girona), 96,25 punts

---

Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions

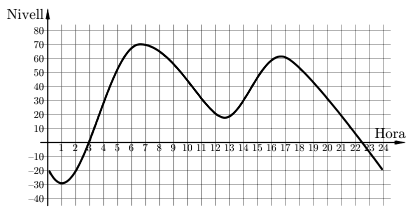
Jordi Font Reverter (Escola Pia Balmes, Barcelona), 96 punts
Arnau Sistach Reinosa (Institut Cap Norfeu, Roses), 95,75 punts
Lluís Isern López (Institut Gabriel Ferrater i Soler, Reus), 94,5 punts
Atao Eduardo Adamo Salazar (Sagrado Corazón de Jesús, Terrassa), 94 punts
Gabriel Comerón Castillo (Institut d'Argentona, Argentona), 93,75 punts
Júlia Alsina Oriol (Institut Jaume Callís, Vic), 93,5 punts
Anna Pujol Coma (Institut Giola, Llinars del Vallès), 92,75 punts
Guillem Córdoba Perarnau (Escola Pia de Granollers, Granollers), 91,5 punts
Eudald Romo Grau (Institut Jaume Vicens Vives, Girona), 91 punts
David Masip Bonet (Institut Pons d'Icart, Tarragona), 90,25 punts
Marc Ballbé Ferrero (Aula Escuela Europea, Barcelona), 89,75 punts
Enric Domingo Domènech (Institut Baix Penedès, El Vendrell) i
Celia Franch López (Aula Escuela Europea, Barcelona), 89 punts

XVII Cangur SCM Nivell 4

Solucions (15 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

1. E. 13 hores.



Al gràfic s'observa que el nivell de l'aigua supera els 30 cm entre les 4 hores i les 10 hores i entre les 14 hores i les 20 hores. En total, 13 hores.

2. A. 22.

Els 0 al final d'un nombre només poden venir de multiplicar el mateix nombre de 2 i 5. Observem que $2^{22} \cdot 3^{33} \cdot 5^{55} \cdot 7^{77} = 2^{22} \cdot 5^{22} \cdot 5^{33} \cdot 3^{33} \cdot 7^{77}$ i això és $10^{22} \cdot 5^{33} \cdot 3^{33} \cdot 7^{77}$ i per tant el nombre de l'enunciat acaba en 22 zeros.

3. C. 5.

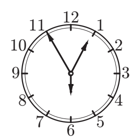
La taula següent correspon a l'enunciat:

2	x	y	z	12

Tenim que $2xy = 30$ i, per tant $xy = 15$.
Com que $xyz = 90$ ha de ser $z = 6$
Finalment 12yz=360 i, per tant $y = \dfrac{260}{12z} = 5$.

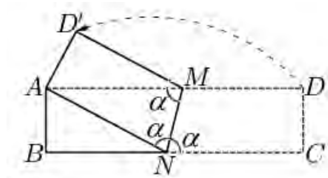
4. A.

Si mirem amb atenció la figura donada veurem que la busca dels segons és la més curta, la dels minuts la més llarga i la de les hores és la mitjana. Per això a les 8:10:00 el rellotge marcarà el que s'indica a la solució A.



5. C. 32 cm^2.

Veurem que l'àrea del quadrilàter $ANMD'$ és justament la meitat de l'àrea del rectangle donat, és a dir $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 16 = 32$ cm^2.



Els dos angles α assenyalats amb vèrtex a M són iguals per la simetria que genera el doblec. L'angle α assenyalat amb vèrtex a M és igual a un dels dos anteriors per alterns interns entre les paral·leles AD i BC tallades per la secant MBN. Per tant el triangle AMN és isòsceles i $AM = AN$ i com que $AN = NC$ pel doblec serà $AM = NC$ i, per tant $BN = MD$. Això ens diu que el quadrilàter $MNCD$ divideix en dues parts iguals el rectangle. Com que pel doblec els quadrilàters $MNCD$ i $MNAD'$ són iguals, això acaba el problema.

6. A. 0.

Si sumem les xifres d'un nombre de nou xifres i dóna 8 és que forçosament alguna de les xifres és 0.

7. D. 11.

Volem que es compleixi $n^{200} < 5^{300} = 5^{200} \cdot 5^{100}$. Podem escriure-ho $\left(\left(\frac{n}{5}\right)^2\right)^1 00 < 5^{100}$. La condició donada, doncs, equival a $\left(\frac{n}{5}\right)^2 < 5$.
Si fem els càlculs corresponents veurem que $(\frac{11}{5})^2 = \frac{121}{25} < 5$ però $(\frac{12}{5})^2 = \frac{144}{25} > 5$. Per tant la solució és 11.

8. D. $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Els resultats de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ i $\frac{1}{f(x)}$ per a les funcions donades a les opcions de resposta són, respectivament:

- Opció A: $2x$ i $\dfrac{x}{2}$
- Opció B: $\dfrac{x}{x+1}$ i $x+1$.
- Opció C: $x+1$ i $\dfrac{x}{x+1}$.
- Opció D: x i x.
- Opció E: $\dfrac{x^2+1}{x}$ i $\dfrac{x}{x^2+1}$.

9. E. $x < -8$.

Com que $64 < x^2$ tenim que $x < -8$ o bé $x > 8$. Tenim també que $x^3 < 64$, per tant el cas $x > 8$ no és possible i aleshores $x^3 < 64 < x^2$ té com a solució el conjunt de tots els valors de x que compleixen $x < -8$.

10. C. 36°.

Els angles del pentàgon regular central són de 108°. Per tant cadascun dels angles en la base dels triangles isòsceles que són les puntes de l'estrella són de 72°. L'angle demanat serà de $180° - 2 \cdot 72° = 36°$.

Qüestions de 4 punts

11. A. 240.

Si la meva edat és una potència de 2 de dues xifres, ha de ser 25. L'edat del meu cosí és una potència de 2 de dues xifres; per tant només pot ser 16, 32 o 64 anys. Com que la suma de les quatre xifres ha de ser senar, això només ho compleix el 64 i el producte de les quatre xifres és $2 \times 5 \times 6 \times 4 = 240$.

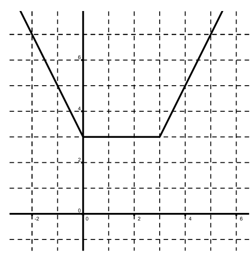
12. D. 20 %.

La intersecció mínima de 4 subconjunts amb el 80 % d'elements en cada un d'ells, o sigui, excloent un 20 % cada vegada, arriba a excloure un màxim de $4 \times 20 = 80\,\%$. La resta, un 20 %, són els que han anat a totes.

13. A. $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

Analitzem la funció $f(x) = |x| + |x-3|$. Es compleix que:

$$f(x) = |x| + |x-3| = \begin{cases} -2x+3 & \text{si} \quad x < 0 \\ 3 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 2x-3 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

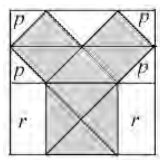


i la gràfica n'és la de la dreta. S'observa clarament que $|x| + |x-3| > 3$ si i només si $x > 3$ o bé $x < 0$.

14. C. Hi ha el doble de noies que de nois..

Si n és el número de nois, amb mitjana x i m el de noies, amb mitjana y, el total de punt sumant les notes de tota la classe és $n \cdot x + m \cdot y$.
La mitjana global es pot obtenir dividint el total de punts pel total d'alumnes, és a dir $\dfrac{n \cdot x + m \cdot y}{n + m}$.
En aquest cas serà $\dfrac{3{,}6 \cdot n + 4, 2 \cdot m}{n + m} = 4$ que ens duu a $3{,}6 \cdot n + 4{,}2 \cdot m = 4 \cdot (n + m)$, o, sumant termes semblants $0{,}4 \cdot n = 0{,}2 \cdot m$ o, el que és el mateix $2n = m$: hi ha el doble de noies que de nois.

15. C. 144 m^2.

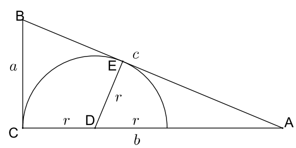


La figura mostra que el terreny plantat de roses es pot dividir en 9 triangles rectangles isòsceles iguals (ombrejats). Per altra banda el quadrat de 16×16 que envolta tot el terreny es completa amb un triangle blanc igual als anteriors, quatre triangles (p) que donen la mateixa àrea que dos dels anteriors, i dos rectangles (r) que donen la mateixa àrea que el quadrat que tenen adjunt és a dir, com quatre triangles ombrejats. Així veiem que l'àrea plantada de roses són les $\dfrac{9}{16}$ parts d'un quadrat de 16×16, és a dir $\dfrac{9}{16} \cdot 16^2 = 144$.

16. D. 37.

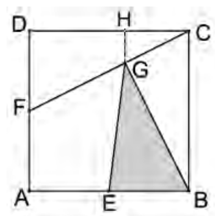
Mitjançant la fórmula de la suma dels n primers nombres naturals $S = \dfrac{n \cdot (n + 1)}{2}$ podem ignorar l'entrada repetida i veure que 40 entrades sumarien 820 i si s'afegeix la següent ja sumaria 861, que és massa. Així, restant 820 a 857 obtenim 37, que és el número de l'entrada que s'ha venut dos cops.

17. E. $\dfrac{ab}{a + c}$.



El triangle ACB és semblant al triangle AED. Per tant $\dfrac{ED}{CB} = \dfrac{AD}{AB}$ és a dir $\dfrac{r}{a} = \dfrac{b - r}{c}$ i si operem en aquesta igualtat i aïllem r trobem la solució indicada.

18. B. $\frac{4}{5}$.



Per calcular l'àrea del triangle BEG veiem que la base $EB = 1$ m i l'altura serà la distància del punt G al costat AB, que podem obtenir restant de 2 la distància de G al costat CD, representada a la figura com GH. Apliquem el teorema de Thales als triangles semblants CDF i CHG, i obtenim la proporció $\frac{GH}{DF} = \frac{CG}{CF}$.

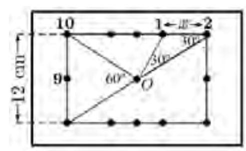
Observem que per la construcció de G tenim

$$\frac{CG}{CF} = \frac{CG}{CG + GF} = \frac{CG}{CG + 3\frac{CG}{2}} = \frac{2}{5}.$$

La proporció indicada i $DF = 1$ donen $GH = $distància$(C, CD) = \frac{2}{5}$.

Així àrea$(BEG) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2 - 2/5) = \frac{4}{5}$ m^2.

19. C. $4\sqrt{3}$.



O serà el centre del rellotge i P_i el punt de l'hora **i**. Com que la velocitat angular de les agulles del rellotge és constant, l'angle P_8OP_{10} és de 60° i l'angle P_1OP_2 és de 30°. Vist que és isòsceles i té un angle de 60°, el triangle P_8OP_{10} és equilàter.

Tenim $OP_{10} = OP_2 = 12$. OP_2 és la base del triangle isòsceles $P_{10}OP_2$, en el qual els angles iguals són de 30° i els costats iguals fan x. Això ens permet raonar que $\cos 30° = \frac{\text{mitja base}}{x} = \frac{6}{x}$ i d'aquí $c = 4\sqrt{3}$

20. E. És impossible que sumin 2012.

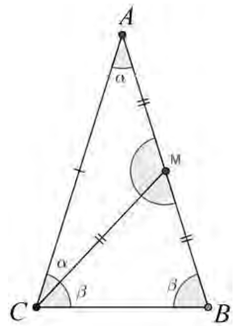
La suma de les cares que es veuen de n daus serà $14 \cdot n+$ les dues cares extremes, perquè per cada dau s'han de sumar dues parelles de cares oposades. Dividint 2012 entre 14 ens dóna 143 de quocient i 10 de residu. La fila hauria de tenir 143 daus i faltarien 10 punts, que hauria de ser la suma de les cares extremes. Ara bé, així com estan aferrats els daus (per cares coincidents), si hi ha un nombre parell de daus les dues cares extremes assenyalen el mateix número i si hi ha un nombre imparell de daus (com és el cas) a les dues cares extremes veurem 2 cares oposades, que sumen 7 punts i no 10. No és possible que la suma sigui 2012.

Qüestions de 5 punts

21. E. $45°$.

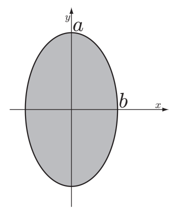
Indicarem el triangle isòsceles com ABC i imaginarem que l'angle diferent és el situat en A. Si pensem que la mitjana que va des de A fins al costat desigual és la que fa que es compleix l'enunciat, obtindríem dos triangles rectangles, que només poden ser isòsceles si els angles són $90°$, $45°$ i $45°$.
No hi ha cap altre triangle que compleixi l'enunciat.

Imaginem que la mitjana que interessa fos la que va des d'un altre vèrtex (li direm C) cap a un dels costats iguals. Com que la mitjana no pot ser igual a cap dels costats que surten de C, per tal que els triangles obtinguts siguin també isòsceles haurà de ser igual a la meitat del costat AB. La hipotètica figura que teniu a la dreta mostra que el triangle no es pot construir perquè els angles ACB i ABC han de ser iguals per ser isòsceles el triangle ABC i β no pot ser igual a $\alpha + \beta$.



22. A. $E_x \neq E_y$ **i** $V_x > V_y$.

Si sabem que el volum d'un el·lipsoide de revolució és proporcional als seus tres semieixos arribarem a la conclusió indicada. Amb un xic de visió espacial ens adonarem que si es gira l'el·lipse al voltant de l'eix x, l'el·lipsoide E_x tindrà de semieixos a, a i b i al voltant de l'eix y, l'el·lipsoide corresponent E_y tindrà semieixos a, b i b. Així està clar que seran el·lipsoides diferents i, com que $a > b$ el volum de E_x, és a dir V_x serà més gran que que V_y.



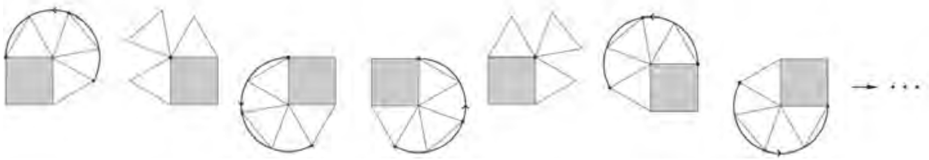
Ara bé, amb una visió espacial més acurada constatarem que, si $a > b$ l'el·lipsoide E_y queda tot ell a l'interior de l'el·lipsoide E_X.

23. D. 113.

Si a és el nombre de vegades que fem la operació (1) i b és el nombre de vegades que fem la operació (2), obtenim com a resultat $\dfrac{7+8a}{8+7b} = \dfrac{7}{8}$. Multiplicant en creu trobem $56 + 64a = 56 + 49b$ és a dir $64a = 49b$ o també $2^6\,a = 7^2\,b$ d'on es pot deduir que els mínims valors enters de a i b que compleixen la igualtat són precisament $a = 7^2$ i $b = 2^6$, que sumen 113.

24. B. $\dfrac{28}{3}\pi$.

La imatge següent mostra les primeres rotacions. Observeu que en la segona, en la cinquena, etc. el vèrtex que interessa es queda quiet.



Si aneu continuant sistemàticament els girs i observeu la cadència de la línia que descriu el vèrtex veureu que es necessiten 8 girs en què el vèrtex es mogui realment perquè el triangle i el vèrtex tornin a la seva posició inicial. Cada un d'aquests girs és de $210° = \dfrac{7}{6}\pi$ rad i per tant, com que el radi del gir és 1, té una longitud de $\dfrac{7}{6}\pi$; com que són 8 trajectes la longitud total recorreguda és $\dfrac{56}{6}\pi = \dfrac{28}{3}\pi$.

25. D. 16.

En la suma $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ algun dels x_i ha de ser el 3. Suposem que $x_4 = 3$. Llavors els dos últims sumands són múltiples de 3 i per tant la suma dels dos primers també ho ha de ser. Tenim doncs que $x_1x_2 + x_2x_3 = x_2(x_1 + x_3)$ ha de ser múltiple de 3. Veiem que x_2 no pot ser 2, ja que $2 \cdot (1 + 4) = 10$; en canvi si que pot ser $x_2 = 1$, que dóna lloc a $1 \cdot (2 + 4) = 6$ i també $x_2 = 4$ que dóna lloc a $4 \cdot (1 + 2) = 12$. En aquest cas tindríem quatre opcions: $\{4, 1, 2, 3\}$, $\{2, 1, 4, 3\}$, $\{1, 4, 2, 3\}$, $\{2, 1, 4, 3\}$ que són totes les permutacions possibles amb $x_4 = 3$.

Els casos per $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$ són del tot anàlegs i, per tant, hi ha $4 \cdot 4 = 16$ permutacions que compleixen la condició de l'enunciat.

26. D. 2012.

Totes les rectes paral·leles a $y = x$ són del tipus $y = x + c$, on c és un nombre real. Perquè tallin la paràbola donada en dos punts s'ha de complir que $x + c = x^2$ tingui dues solucions diferents, o sigui que $x^2 - x - c = 0$ ha de tenir discriminant positiu $1 + 4c > 0$. La suma d'abscisses de les arrels és $x_1 + x_2 = 1$ independentment del valor de c (sempre que $c > -1/4$). Podem considerar 2012 rectes que tallin la paràbola en dos punts (evidentment que hi ha 2012 nombres reals diferents més grans que -1/4) i la suma demanada serà 2012.

27. A. $A = (4, 3, 5)$.

En un cub només hi ha tres distàncies diferents possibles entre vèrtexs: una aresta, una diagonal d'una cara o una diagonal del cub.
Si calculem les distàncies entre els punts P, Q i R obtenim:
$d(PQ) = \sqrt{2^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{72}$
$d(PR) = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24}$
$d(QR) = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{48}$
Com que són tres distàncies diferents i la més gran de totes és $d(PQ)$ això ens diu que aquesta és la diagonal del cub.
El seu punt mitjà és $M = \dfrac{P+Q}{2} = (4, 3, 5)$.

28. B. 3.

Si es calculen termes fins trobar regularitats, es troba que el terme 13è i 14è són dos 1 i, doncs, a partir d'ells es repeteixen:

1, 1, 0, 1, -1, 0, -1, -1, 0, -1, 1, 0, 1, 1,...

Aleshores si se sumen els números del cicle dóna 0, pel que la suma dels $12 \cdot 8 = 96$ primers termes serà 0, i ens caldrà sumar els quatre primers termes d'un nou grup. Per tant la resposta és $1 + 1 + 0 + 1 = 3$.

29. E. 6.

De l'enunciat en deduïm l'expressió $a \cdot b = \text{suma}(1 + 2 + ... + 26) - a - b$.
Com que $\text{suma}(1 + 2 + ... + 26) = 26 \cdot 27/2 = 351$ obtenim $a \cdot b = 351 - b - a$ i si aïllem a d'aquesta expressió, $a = \dfrac{351 - b}{b + 1}$.
Com que $a < 26$, podem comprovar que $b > 12$ perquè es compleixi la igualtat anterior. La divisió anterior només és entera per $b = 15$ (que comporta $a = 21$) o bé $b = 21$ (que dóna $a = 15$). Per tant $|a - b| = 6$.

La comprovació de possibilitats es pot accelerar veient mitjançant congruències en la igualtat inicial que b no pot ser congruent amb 2 (mod 3) ni congruent amb 4 (mod 5).

30. B. El 2n i el 2010è..

El primer gat boig que es descobreix, podria ser l'últim? Seria ...SSSB. Podria haver-hi abans algun altre gat boig no descobert? No podria ser el d'abans dels tres S finals perquè l'haurien descobert; i així successivament es dedueix que, perquè l'últim que entra sigui el primer gat boig descobert, tots els anteriors han de ser savis i això contradiu l'enunciat. Aquesta consideració elimina l'opció de resposta "El 4t i l'últim."

El gat boig que es descobreix, podria ser el penúltim? Seria ...SSBS. No pot ser ...(S)SSBS perquè el gat boig s'hagués descobert abans. Hauria de ser doncs ...(B)SSBS. Abans del B no hi pot anar un S és a dir ...(SB)SSBS perquè altrament s'hauria descobert un B abans. I així successivament es veu que hauria de ser (SSBBSSBBSSBB...SSBB)SSBS i concorda amb que l'últim pugui ser el 2012è i aleshores es descobreixi per primera vegada un gat boig. Si fos així no podrien ser bojos ni el primer ni el segon i s'eliminen les opcions de resposta ”El 1r i el 2011è”, i el ”2n i el 2011è.”

Podria ser l'avantpenúltim? Seria ...SBSS. Raonant semblantment al que ja hem fet anteriorment en aquest cas s'arriba a la conclusió que hauria de ser (SBSBSB....SB)SBSS, cosa que faria que quan entra el 2012è es descobreixi per primera vegada un gat boig i es veu que és correcta la resposta ”El 2n i el 2010è.”

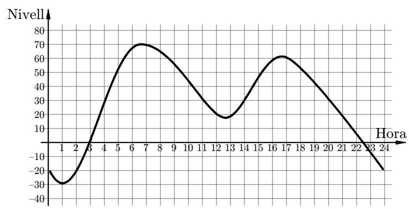
Si s'estudia de manera anàloga la resposta a la pregunta: podria ser el d'abans de l'avantpenúltim? s'elimina l'opció ”El 3r i el 2009è.”

XVII Cangur SCM Nivell 4

Solucions (22 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

1. A. 13 hores.



Al gràfic s'observa que el nivell de l'aigua supera els 30 cm entre les 4 hores i les 10 hores i entre les 14 hores i les 20 hores. En total, 13 hores.

---

2. D. $\sqrt[3]{9}$.

$\sqrt{3\sqrt[3]{3}} = \left(3 \cdot 3^{1/3}\right)^{1/2} = 3^{4/3 \cdot 1/2} = 3^{2/3} = \sqrt[3]{9}.$

---

3. A. 3.

La taula següent correspon a l'enunciat:

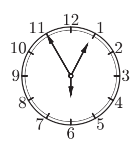
3	x	y	z	15

Tenim que $3xy = 54$ i, per tant $xy = 18$.
Com que $xyz = 90$ ha de ser $z = 5$
Finalment 15yz=225 i, per tant $y = \dfrac{225}{15z} = 3$.

---

4. E.

Si mirem amb atenció la figura donada veurem que la busca dels segons és la més curta, la dels minuts la més llarga i la de les hores és la mitjana. Per això a les 8:10:00 el rellotge marcarà el que s'indica a la solució E.



5. D. 4.

La suma de tots els números és 28, per tant hem de veure com sumem 14 amb un subconjunt (i com que el número 1 haurà d'estar en un dels dos subconjunts només cal considerar subconjunts que sumin 14 i continguin el número 1). Aquests són: $\{1,2,4,7\}$, $\{1,2,5,6\}$, $\{1,3,4,6\}$, $\{1,6,7\}$ i per tant la resposta és 4.

6. D. 0.

Si sumem les xifres d'un nombre de vuit xifres i dóna 7 és que forçosament alguna de les xifres és 0.

7. A. 12.

Els 0 al final d'un nombre només poden venir de multiplicar el mateix nombre de 2 i 5. Observem que $2^{12} \cdot 3^{13} \cdot 5^{15} \cdot 7^{17} = 2^{12} \cdot 5^{12} \cdot 5^3 \cdot 3^{13} \cdot 7^{17}$ i això és $10^{12} \cdot 5^3 \cdot 3^{13} \cdot 7^{17}$ i per tant el nombre de l'enunciat acaba en 12 zeros.

8. B. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Els resultats de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ i $\frac{1}{f(x)}$ per a les funcions donades a les opcions de resposta són, respectivament:

- Opció A: $3x^2$ i $\dfrac{x^2}{3}$
- Opció B: x^2 i x^2.
- Opció C: $\dfrac{x^2}{x^2+1}$ i x^2+1.
- Opció D: $2x^2+2$ i $\dfrac{x^2}{2x^2+2}$.
- Opció E: $\dfrac{x^4+1}{x^2}$ i $\dfrac{x^2}{x^4+1}$.

9. E. $x < -8$.

Com que $64 < x^2$ tenim que $x < -8$ o bé $x > 8$. Tenim també que $x^3 < 64$, per tant el cas $x > 8$ no és possible i aleshores $x^3 < 64 < x^2$ té com a solució el conjunt de tots els valors de x que compleixen $x < -8$.

10. B. 36°.

Els angles del pentàgon regular central són de 108°. Per tant cadascun dels angles en la base dels triangles isòsceles que són les puntes de l'estrella són de 72°. L'angle demanat serà de $180° - 2 \cdot 72° = 36°$.

Qüestions de 4 punts

11. C. 240.

Si la meva edat és una potència de 2 de dues xifres, ha de ser 25. L'edat del meu cosí és una potència de 2 de dues xifres; per tant només pot ser 16, 32 o 64 anys. Com que la suma de les quatre xifres ha de ser senar, això només ho compleix el 64 i el producte de les quatre xifres és $2 \times 5 \times 6 \times 4 = 240$.

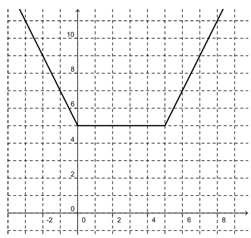
12. B. $20\,\%$.

La intersecció mínima de 4 subconjunts amb el $80\,\%$ d'elements en cada un d'ells, o sigui, excloent un $20\,\%$ cada vegada, arriba a excloure un màxim de $4 \times 20 = 80\,\%$. La resta, un $20\,\%$, són els que han anat a totes.

13. E. $(-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$.

Analitzem la funció $f(x) = |x| + |x-5|$. Es compleix que:

$$f(x) = |x| + |x-5| = \begin{cases} -2x+5 & \text{si } x < 0 \\ 5 & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ 2x-5 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$



i la gràfica n'és la de la dreta. S'observa clarament que $|x| + |x-5| > 5$ si i només si $x > 5$ o bé $x < 0$.

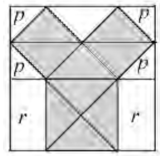
14. D. Hi ha el doble de xiques que de xics.

Si n és el número de xics, amb mitjana x i m el de xiques, amb mitjana y, el total de punt sumant les notes de tota la classe és $n \cdot x + m \cdot y$.

La mitjana global es pot obtenir dividint el total de punts pel total d'alumnes, és a dir $\dfrac{n \cdot x + m \cdot y}{n+m}$.

En aquest cas serà $\dfrac{7{,}6 \cdot n + 8,2 \cdot m}{n+m} = 8$ que ens duu a $7{,}6 \cdot n + 8{,}2 \cdot m = 8 \cdot (n+m)$, o, sumant termes semblants $0{,}4 \cdot n = 0{,}2 \cdot m$ o, el que és el mateix $2n = m$: hi ha el doble de xiques que de xics.

15. B. 225 m^2.



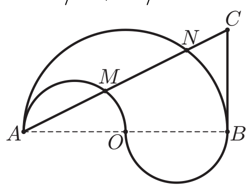
La figura mostra que el terreny plantat de roses es pot dividir en 9 triangles rectangles isòsceles iguals (ombrejats). Per altra banda el quadrat de 20×20 que envolta tot el terreny es completa amb un triangle blanc igual als anteriors, quatre triangles (p) que donen la mateixa àrea que dos dels anteriors, i dos rectangles (r) que donen la mateixa àrea que el quadrat que tenen adjunt és a dir, com quatre triangles ombrejats. Així veiem que l'àrea plantada de roses són les $\dfrac{9}{16}$ parts d'un quadrat de 20×20, és a dir $\dfrac{9}{16} \cdot 20^2 = 225$.

16. C. 25.

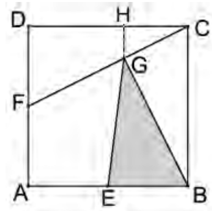
Mitjançant la fórmula de la suma dels n primers nombres naturals $S = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ podem ignorar l'entrada repetida i veure que 40 entrades sumarien 820 i si s'afegeix la següent ja sumaria 861, que és massa. Així, restant 820 a 845 obtenim 25, que és el número de l'entrada que s'ha venut dos cops.

17. D. Segment AN més arc NB .

- A) arc ANB: té longitud π
- B) arc AO + arc OB : camí de longitud π, igual que l'arc ANB
- C) segment AC + segment CB és $1+\sqrt{5}$. Encara que no tinguem calculadora com que $2{,}2 \times 2{,}2 = 4{,}84$ sabem que $\sqrt{5} > 2{,}2$ i per tant el trajecte $C > \pi$
- D) segment AN + arc NB < arc AN + arc NB = trajecte A = π
- E) Segment AN més arc MO més arc OB . Per semblança E) és la meitat del trajecte D + arc OB però l'arc OB és $\pi/2$. Per tant $E = D/2 + \pi/2$ i com que $\pi > D$ podem deduir $E > D/2 + D/2 = D$.



18. B. $\frac{4}{5}$.



Per calcular l'àrea del triangle BEG veiem que la base $EB = 1$ m i l'altura serà la distància del punt G al costat AB, que podem obtenir restant de 2 la distància de G al costat CD, representada a la figura com GH. Apliquem el teorema de Thales als triangles semblants CDF i CHG, i obtenim la proporció $\frac{GH}{DF} = \frac{CG}{CF}$.

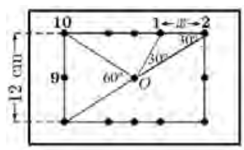
Observem que per la construcció de G tenim

$$\frac{CG}{CF} = \frac{CG}{CG + GF} = \frac{CG}{CG + 3\frac{CG}{2}} = \frac{2}{5}.$$

La proporció indicada i $DF = 1$ donen GH =distància$(C, CD) = \frac{2}{5}$.

Així àrea$(BEG) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2 - 2/5) = \frac{4}{5}$ m^2.

19. C. $4\sqrt{3}$.



O serà el centre del rellotge i P_i el punt de l'hora **i**. Com que la velocitat angular de les agulles del rellotge és constant, l'angle P_8OP_{10} és de 60° i l'angle P_1OP_2 és de 30°. Vist que és isòsceles i té un angle de 60°, el triangle P_8OP_{10} és equilàter.

Tenim $OP_{10} = OP_2 = 12$. OP_2 és la base del triangle isòsceles $P_{10}OP_2$, en el qual els angles iguals són de 30° i els costats iguals fan x. Això ens permet raonar que $\cos 30° = \frac{\text{mitja base}}{x} = \frac{6}{x}$ i d'aquí $c = 4\sqrt{3}$

20. D. $(0,1)$ **i** $(-\frac{1}{b}, 0)$.

Només cal substituir els punts en l'equació i veiem que la resposta correcta és la D.

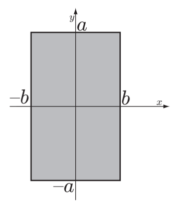
Qüestions de 5 punts

21. D. 24.

Són nombres de la sort tots els acabats en 0 (9), també els formats per un nombre parell i un 5 en els dos ordres (25,45,..56,58) (que són 8), el 55, el 59 i el 95 que en multiplicar les xifres donen nombres amb xifres "parell i 5" (3 més), i els que en multiplicar els dos dígits donin 54 o 56 (4 més). En total, doncs, 24

22. B. $C_x \neq C_y$ i $V_x > V_y$.

El volum d'un cilindre és proporcional al radi de la base al quadrat i a l'altura. Amb un xic de visió espacial ens adonarem que si es gira el rectangle al voltant de l'eix x, el cilindre C_x tindrà volum proporcional a a^2 i b i al voltant de l'eix y, el cilindre corresponent C_y tindrà volum proporcional a a i b^2. Així està clar que seran cilindres diferents i, com que $a > b$ el volum de C_x, és a dir V_x serà més gran que V_y.

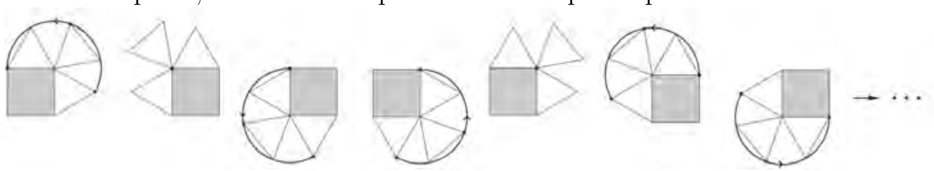


23. D. 113.

Si a és el nombre de vegades que fem la operació (1) i b és el nombre de vegades que fem la operació (2), obtenim com a resultat $\dfrac{7+8a}{8+7b} = \dfrac{7}{8}$. Multiplicant en creu trobem $56 + 64a = 56 + 49b$ és a dir $64a = 49b$ o també $2^6\, a = 7^2\, b$ d'on es pot deduir que els mínims valors enters de a i b que compleixen la igualtat són precisament $a = 7^2$ i $b = 2^6$, que sumen 113.

24. B. $\dfrac{28}{3}\pi$.

La imatge següent mostra les primeres rotacions. Observeu que en la segona, en la cinquena, etc. el vèrtex que interessa es queda quiet.



Si aneu continuant sistemàticament els girs i observeu la cadència de la línia que descriu el vèrtex podreu arribar a la solució.

Es necessiten 8 girs en què el vèrtex es mogui realment perquè el triangle i el vèrtex tornin a la seva posició inicial. Cada un d'aquests girs és de $210° = \frac{7}{6}\pi$ rad i per tant, com que el radi del gir és 1, té una longitud de $\frac{7}{6}\pi$; com que són 8 trajectes la longitud total recorreguda és $\frac{56}{6}\pi = \frac{28}{3}\pi$.

---

25. D. 2012.

Totes les rectes paral·leles a $y = x$ són del tipus $y = x + c$, on c és un nombre real. Perquè tallin la paràbola donada en dos punts s'ha de complir que $x + c = x^2$ tingui dues solucions diferents, o sigui que $x^2 - x - c = 0$ ha de tenir discriminant positiu $1 + 4c > 0$. La suma d'abscisses de les arrels és $x_1 + x_2 = 1$ independentment del valor de c (sempre que $c > -1/4$). Podem considerar 2012 rectes que tallin la paràbola en dos punts (evidentment que hi ha 2012 nombres reals diferents més grans que -1/4) i la suma demanada serà 2012.

---

26. B. 2 m.

Si imaginem un rectangle de 15 m d'alçada i 8 metres d'amplada, que enrotlla l'arbre (exactament, li dona 8 voltes), el camí dibuixat es transforma en la diagonal d'aquest rectangle que per Pitàgores veiem que val 17. Per tant la resposta és la B; recorre 17 m en comptes de 15 que recorreria si baixés pel dret.

---

27. B. 3.

El número $48510 = 10 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$ compleix que el producte de tots els seus divisors té 36 zeros. El número 300 compleix que el producte de tots els seus divisors té 18 zeros, i el número 2100 compleix que el producte de tots els seus divisors té 36 zeros. El número 4000 també compleix aquesta condició, però per qualsevol número que tingui 4 o més zeros el producte dels divisors tindrà més de 50 zeros. Per tant la resposta és B) 3.

Una resposta raonada del problema vindria de la consideració que el producte de tots els divisors d'un nombre és una potència del nombre. Si el nombre de divisors és parell, exactament la potència del nombre que té per exponent la meitat del nombre de divisors i si, en canvi, el nombre de divisors és imparell l'exponent serà la meitat del nombre de divisors més 1.

---

28. C. 2.

Examinem, segons el signe de les variables, el sistema d'equacions

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

• Si $x \geq 0$ i $y \geq 0$ les equacions del sistema es transformen en $x + y = 1$ i $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y) = 1$ que té una única solució $x = 1, y = 0$.

• Si $x \geq 0$ i $y \leq 0$, és a dir que $|y| = -y$ ens porta a la mateixa solució que ja coneixem.

• Si $x \leq 0$ i $y \geq 0$, és a dir que $|x| = -x$ ens quedarà $-x + y = 1$ i $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y) = 1$ que ens porta a un sistema incompatible.

• Si $x \leq 0$ i $y \leq 0$ (ho deixem al lector) trobem la solució $x = -1, y = 0$.

---

29. C. 3.

De l'enunciat en deduïm l'expressió $a \cdot b =$ suma$(1 + 2 + ... + 17) - a - b$.
Com que suma$(1 + 2 + ... + 17) = 17 \cdot 18/2 = 153$ obtenim $a \cdot b = 153 - b - a$ i si aïllem a d'aquesta expressió, $a = \dfrac{153 - b}{b + 1} = -1 + \dfrac{154}{b + 1}$.
La divisió anterior només és entera i dóna valor de a en el conjunt que interessa per $b = 13$ (que comporta $a = 10$) o bé $b = 10$ (que dóna $a = 13$). Per tant $|a - b| = 3$.

---

30. D. El 2n i el 2010è.

El primer gat boig que es descobreix, podria ser l'últim? Seria ...SSSB. Podria haver-hi abans algun altre gat boig no descobert? No podria ser el d'abans dels tres S finals perquè l'haurien descobert; i així successivament es dedueix que, perquè l'últim que entra sigui el primer gat boig descobert, tots els anteriors han de ser savis i això contradiu l'enunciat. Aquesta consideració elimina l'opció de resposta "El 4t i l'últim."

El gat boig que es descobreix, podria ser el penúltim? Seria ...SSBS. No pot ser ...(S)SSBS perquè el gat boig s'hagués descobert abans. Hauria de ser doncs ...(B)SSBS. Abans del B no hi pot anar un S és a dir ...(SB)SSBS perquè altrament s'hauria descobert un B abans. I així successivament es veu que hauria de ser (SSBBSSBBSSBB...SSBB)SSBS i concorda amb que l'últim pugui ser el 2012è i aleshores es descobreixi per primera vegada un gat boig. Si fos així no podrien ser bojos ni el primer ni el segon i s'eliminen les opcions de resposta "El 1r i el 2011è", i, el "2n i el 2011è."

Podria ser l'avantpenúltim? Seria ...SBSS. Raonant semblantment al que ja hem fet anteriorment en aquest cas s'arriba a la conclusió que hauria de ser (SBSBSB....SB)SBSS, cosa que faria que quan entra el 2012è es descobreixi per primera vegada un gat boig i es veu que és correcta la resposta "El 2n i el 2010è."

Si s'estudia de manera anàloga la resposta a la pregunta: podria ser el d'abans de l'avantpenúltim? s'elimina l'opció "El 3r i el 2009è."

Marató de problemes 2012

Activitat telemàtica per a alumnes d'ESO. Febrer, març i abril de 2012. Enunciats

0. (Problema de 2 punts.)
Tres nombres de tres xifres, de manera que totes nou xifres són diferents, sumen 2012. Quina és la xifra que no apareix en cap dels tres sumands?

$$\begin{array}{rccc} & A & B & C \\ + & D & E & F \\ + & G & H & I \\ \hline 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

1. (Problema de 2 punts.)
Calcula quin és el valor més gran que pot tenir el nombre natural n perquè 9^n sigui un divisor de

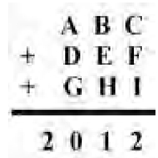
$$N = 9 \times 99 \times 999 \times 9999 \times 99999 \times 999999 \times ...$$

Nota: segons la contrasenya de participació el problema es plantejava amb 6, 7 ,8 o 9 factors)

2. (Problema de 2 punts.)
Un estudiant ha fet 5 exàmens i en total ha donat la resposta correcta a 31 qüestions. Ha anat millorant i en cada examen ha tingut més encerts que en l'examen anterior. El nombre de respostes correctes en el cinquè examen és el triple de les que va encertar en el primer examen. Amb aquestes dades, quin és el màxim nombre de qüestions que va poder respondre correctament en el quart examen?
Nota: hi havia variants de l'enunciat en funció de la contrasenya.

3. (Problema de 2 punts.)
Ens diuen que un quadrilàter $ABCD$ té com a longituds dels costats $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ i $DA = d$, i que la diagonal AC també té com a longitud un nombre enter d'unitats. (Naturalment cal suposar que totes les longituds anteriors s'expressen en les mateixes unitats.)
Creieu que és possible que les dades que s'han indicat siguin totes correctes? En cas afirmatiu, quina és la màxima longitud (entera) que pot tenir la diagonal AC?
El problema es va plantejar amb dades numèriques en funció de la contrasenya.

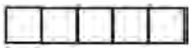
4. (Problema de 3 punts.)
Tres nombres de tres xifres, de manera que totes nou xifres són diferents, sumen 2012.
Quantes sumes diferents hi ha que compleixin les condicions de l'enunciat anterior?



Dues sumes amb els mateixos sumands es consideraran la mateixa suma.

---

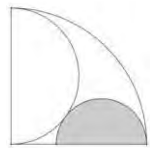
5. (Problema de 3 punts.)
Col·loquem a latzar els nombres de l'1 al 5 en les cinc caselles de la figura següent.



Quina és la probabilitat que tots els nombres obtinguts sumant cada parella de dos nombres situats en caselles adjacents, siguin primers?

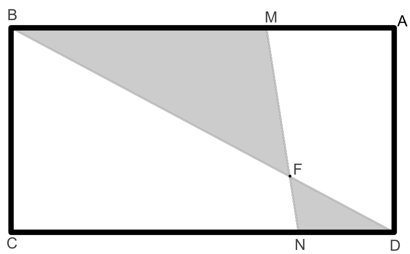
---

6. (Problema de 4 punts.)
En la figura, el diàmetre del semicercle gran i el radi del quadrant de cercle mesuren tots dos M cm. Quin és, en cm, el radi del semicercle petit?



---

7. (Problema de 4 punts.)
La bandera de la figura s'ha dissenyat en un rectangle $ABCD$ de manera que la distància AM és igual a un terç del costat llarg del rectangle i la distància CN és igual a tres quarts del costat llarg del rectangle. Quina fracció de l'àrea de la bandera està ombrejada?



---

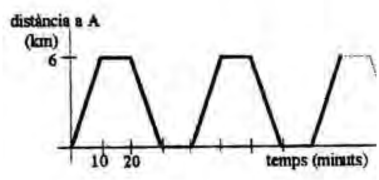
8. (Problema de 2 punts.)
Les $\dfrac{m}{n}$ parts dels alumnes d'una classe han tret una mitjana de P punts. En el conjunt format per la resta de la classe, $\dfrac{a}{b}$ parts tenen una mitjana de Q punts i $\dfrac{b-a}{b}$ tenen una mitjana de R punts. Quina és la mitjana de la classe?

Nota: El problema es plantejava amb dades numèriques depenents de la contrasenya.

---

9. (Problema de 3 punts.)
Trobeu el nombre natural N, que sigui el més petit de tres xifres, totes diferents de 0, amb la propietat que la mitjana dels nombres que es poden formar per reordenació de les xifres de N (inclòs també N) sigui un nombre acabat en 0.

10. (Problema de 2 punts.)
Un autobús fa el recorregut **A-B-A-B-...** on **A** i **B** representen dues poblacions situades a 6 km l'una de l'altra. L'autobús no fa cap més parada que a **A** i **B**. La gràfica següent ens dóna la distància que està prevista entre l'origen A del trajecte i l'autobús en qualsevol moment, amb el temps expressat en minuts a partir del moment que comença el servei.

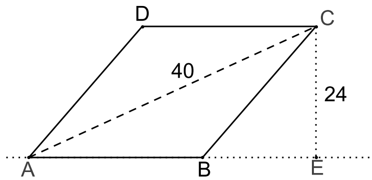


Avui l'autobús ha començat el servei a les 5 del matí i no hi ha hagut cap impediment per seguir exactament l'horari previst. A quina distància de **A** es troba a mig quart d'onze del matí? A més haureu de dir si està parat, si està circulant des d'**A** cap a **B** o si està circulant des de **B** cap a **A**.

11. (Problema de 3 punts.)
En una casa, una formiga té el niu a prop d'on guarden els terrosos de sucre. Ha fixat l'atenció en un terròs de sucre i en va menjant una mica, cada dia del mateix terròs, i cada dia la mateixa quantitat. El terròs, com és habitual, tenia inicialment forma d'ortoedre. Casualment, quan la formiga ja n'ha menjat 19 dies el que queda del terròs torna a tenir forma d'ortoedre, de manera que cadascuna de les tres dimensions ha disminuït un terç del seu valor inicial. Quants dies més la formiga encara podrà menjar del seu terròs de sucre, cada dia la mateixa quantitat?

12. (Problema de 4 punts.)
Escrivim tots els nombres de sis xifres (és a dir compresos entre 100000 i 999999) formats només per dues xifres diferents, que una apareix quatre vegades i l'altra dues. Per exemple 767677 o bé 999944 o bé 770770,... Quants dels nombres que hem escrit són múltiples de 11?

13. (Problema de 7 punts. Es demanava explicació detallada.)
El quadrilàter $ABCD$ de la figura és un rombe. La diagonal AC mesura 40 unitats i l'altura del quadrilàter traçada des del vèrtex C fa 24 unitats. Quina és la mesura de l'altra diagonal del rombe?



14. (Problema de 7 punts. Es demanava explicació detallada.)
Calcula quin és el valor més petit de N que compleix la propietat que $N!$ és múltiple de 2^{2012}.

Marató de problemes 2012

Els resultats

Aquesta activitat es va desenvolupar des del dia 14 d'octubre de 2011 fins el dia 28 de novembre de 2011.

Es van inscriure 151 participants.

Les respostes rebudes van ser valorades globalment com a molt positives i cal destacar que 15 persones van enviar les solucions encertades a tots els problemes de resposta concreta (0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, i 8), que 12 van enviar raonaments correctes a tots tres problemes dels quals es demanava una explicació detallada (5, 9 i 10) i que 29 participants van superar els 21 punts de 41 possibles.

- **Primers premis**, ex-aequo amb 40,8 punts
  Gerard Orriols Giménez, 4rt ESO, Institut Thalassa, de Montgat i
  Marc Felipe i Alsina, 1r BTX, Institut Jaume Vicens Vives, de Girona
- **Segons premis**, ex-aequo amb 40,6 punts
  David Masip Bonet, 2n BTX, Institut Pons d'Icart, de Tarragona i
  Eric Milesi Vidal, 2n BTX, Col·legi Pare Manyanet, de Barcelona
- **Mencions**, alumnes que han superat els 38 punts
  Júlia Alsina Oriol, 2n BTX, Institut Jaume Callís, de Vic,
  Jordi Barceló Mercader, 2n BTX,
  Col·legi Jesús Maria-Sant Andreu, de Barcelona,
  Pol Torrent Soler, 2n BTX, Institut Jaume Vicens Vives, de Girona,
  Paula Caballero Lillo, 1r BTX,
  Institut Francesc Xavier Lluch i Rafecas de Vilanova i la Geltrú i
  Pau Surrell Rafart, 1r BTX, Institut Jaume Vicens Vives, de Girona

Marató de problemes 2012

Solucions

0. Resposta: la xifra que no apareix és el 4.

S'observa que les tres xifres de la columna de les unitats i les tres de la columna de les desenes han de sumar més de 10, és a dir, que n'hem de portar. Però com que les deu xifres del 0 al 9 sumen 45 i com que les tres xifres de la columna de les centenes han de sumar, com a mínim 18 per poder arribar a 20 amb les que es portin de la columna de les desenes, es dedueix que ni de les unitats ni de les centenes no en podem portar 2 (no poden sumar més de 20). Així doncs les tres xifres de la columna de les unitats sumen 12, les tres de les desenes sumen 10 (que amb la que portem seran 11), i les tres xifres de les centenes sumen 19 (que amb la que portem seran 20).
Com que $12 + 10 + 19 = 41$ la xifra que falta fins al total de 45 és, amb tota seguretat, un 4.

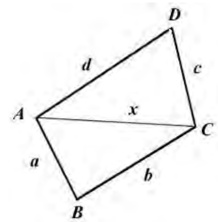
1. Respostes: per a 6, 7, 8 o 9 factors, $n = 7, 8, 9, 11$.

Si $N = 9 \times 99 \times 999 \times 9999 \times 99999 \times 999999 \times ...$ i dividim N per tants 9 com el nombre de factors que té N obtindrem $1 \times 11 \times 111 \times 1111 \times 11111 \times 111111 \times ....$
Per tant, si f és el nombre de factors de N, aleshores 9^f és divisor de N.
Com que 111 i 111111 són múltiples de 3, 111×111111 és múltiple de 9; N serà doncs en tots els casos divisible com a mínim per 9^{f+1}.
En el cas que el nombre N tingui 9 factors, aleshores apareix 111111111 que és múltiple de 9, i augmenta en 1 la solució del problema.

2. Resposta: 8.

Aquest era un exercici que tenia com a principal objectiu una lectura acurada de l'enunciat i un tempteig sistemàtic. Les úniques distribucions d'encerts que corresponen a l'enunciat que apareix en aquesta publicació són 3, 4, 7, 8, 9 i 3, 5, 6, 8, 9.

3. A la figura de la pàgina següent teniu un esquema de la situació que planteja el problema (amb les lletres de l'enunciat general proposat). Com que un costat d'un triangle ha de ser més petit que la suma dels altres dos i més gran que la seva diferència, es podrà dibuixar el triangle ABC si i només si $x < a + b$ i alhora $x > |a - b|$ i per al triangle ACD i, per tant, per completar el quadrilàter cal que $x < c + d$ i alhora $x > |c - d|$.



Si existeix algun nombre x que compleixi les quatre desigualtats indicades es pot construir el quadrilàter; si algun valor enter de x compleix les quatre desigualtats serà vàlida la condició suplementària que la diagonal també tingui longitud entera.

En totes les variants que es proposaven en funció de la contrasenya es podia construir el quadrilàter i, a més, existia un únic nombre enter x que podia ser la longitud de la diagonal i complir les condicions de l'enunciat.

- $AB = 8$, $BC = 9$, $CD = 20$, $DA = 5$. Resposta: 16.
- $AB = 11$, $BC = 7$, $CD = 22$, $DA = 6$. Resposta: 17
- $AB = 8$, $BC = 25$, $CD = 10$, $DA = 9$. Resposta: 18
- $AB = 20$, $BC = 6$, $CD = 7$, $DA = 9$. Resposta 15
- $AB = 8$, $BC = 7$, $CD = 4$, $DA = 17$. Resposta 14

---

4. Resposta: 216.

Si reviseu la solució completa del problema 0 recordareu que la xifra que no apareix és el 4 i que les xifres de la columna de les unitats han de complir $C + F + I = 12$, les de les desenes $B + E + H = 10$ i les de les centenes $A + D + G = 19$.

Per tal d'assegurar-nos de no comptar dues vegades una suma que tingui els tres mateixos nombres de tres xifres com a sumands, imaginarem que escrivim sempre les xifres de les unitats en ordre creixent. Fet així, les possibilitats que tenim per a les unitats, C, F, I són 0, 3, 9 o bé 0, 5, 7 o bé 1, 2, 9, o bé 1, 3, 8, o bé 1, 5, 6 , o bé 2, 3, 7.

Tot seguit analitzem en cada cas com podem completar les columnes de les desenes i de les centenes (amb el benentès que el 0 no pot anar a les centenes perquè els tres sumands han de ser "nombres de tres xifres").

- Cas 0, 3, 9 per a les unitats. S'observa que només pot ser 1+2+7 per a les desenes i 5+6+8 per a les centenes. Com que cada terna de xifres es pot ordenar de 6 maneres, en conjunt donaran 36 sumes diferents.
- Cas 0, 5, 7 per a les unitats. Ha de ser desenes 1+3+6 i centenes 2+8+9; tenim 36 sumes més.
- Semblantment el cas 1, 2, 9 dóna 36 sumes més; el cas 1, 3, 8 no dóna cap possibilitat; el cas 1, 5, 6 en dóna dues, 0+2+8 amb 3+7+9 i 0+3+7 amb 2+8+9 i per tant 72 sumes diferents i, finalment, el cas 2, 3, 7 aporta 36 possibilitats més.

Per tant el nombre de sumes diferents que compleixen l'enunciat és de 216.

---

5. Resposta: $\dfrac{1}{30}$.

Hi ha 120 casos possibles (que es poden trobar com $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$) per a l'acció de col·locar les xifres 1, 2, 3, 4 i 5 en les cinc caselles.

Podeu observar que, a fi i efecte que es compleixi l'enunciat, el 5 només pot anar al costat del 2. Per tant el 5 anirà a un extrem amb el 2 al costat, és a dir 5 2 _ _ _ o bé _ _ _ 2 5.

Al costat del 2 hi poden anar l'1 o el 3, l'1 pot anar només amb el 2 i el 4.

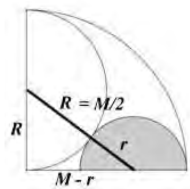
Si continueu l'anàlisi amb atenció veureu que els únics casos favorables són aquests: 5 2 1 4 3, 5 2 3 4 1 i els seus simètrics 3 4 1 2 5 i 1 4 3 2 5.

La regla de Laplace ens dóna la probabilitat, $\dfrac{4}{120} = \dfrac{1}{30}$.

---

6. Resposta: $r = \frac{M}{3}$.

Si unim els centres dels dos semicercles, el segment que els uneix passa pel punt de tangència. Amb les lletres indicades a la figura i tenint en compte que el radi del semicercle gran és $\frac{M}{2}$, el teorema de Pitàgores ens permet escriure: $\left(\frac{M}{2}\right)^2 + (M r)^2 = \left(\frac{M}{2} + r\right)^2$.



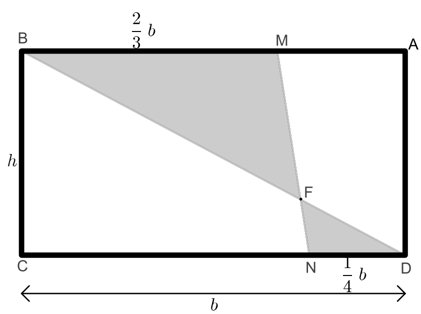
Si desenvolupem els quadrats, simplifiquem i agrupem termes semblants, arribem a $3M \cdot r = M^2$, d'on es dedueix de seguida $r = \frac{M}{3}$.

---

7. Resposta: $\dfrac{73}{264}$.

Direm F al punt on es tallen les rectes que defineixen els triangles ratllats i b, h la base i l'altura de la bandera.

Els dos triangles FMB i FND són semblants perquè tenen els tres angles iguals:



• l'angle en F per angles oposats pel vèrtex

• l'angle en M d'un i l'angle en N de l'altre per angles alterns interns entre paral·leles tallades per una secant

• semblantment per a l'angle en B d'un triangle i l'angle en D de l'altre.

La raó de semblança entre aquests triangles és $k = \frac{\frac{2}{3}\, b}{\frac{1}{4}\, b} = \frac{8}{3}$.
Aquesta mateixa serà la relació entre les altures dels dos triangles; pensarem en les altures des de F perpendiculars al costat llarg del rectangle. Per això, si indiquem com a_1 l'altura del triangle FND, aleshores l'altura a_2 del triangle FMB serà $a_2 = \dfrac{8}{3}\, a_1$ i es compleix que la suma d'aquestes dues altures és l'altura del rectangle: $h = a_1 + \frac{8}{3}\, a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{11}\, h, a_2 = \frac{8}{11}\, h$
Vist això ja podem calcular l'àrea total ombrejada, com l'àrea del triangle FND més l'àrea del triangle FMB: $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{11}\, h \cdot \frac{1}{4}\, b\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{8}{11}\, h \cdot \frac{2}{3}\, b\right) = \frac{73}{264}\, bh$ és a dir $\frac{73}{264}$ de l'àrea total de la bandera.

---

8. Indiquem com N el nombre d'alumnes de la classe. Les $\frac{m}{n}$ parts del conjunt d'alumnes són $\frac{m \cdot N}{n}$ persones. Si han tret una mitjana de P punts, la suma de les seves notes és $\frac{m \cdot N}{n} \cdot P$. Les $\frac{a}{b}$ parts de la resta de la classe són $\frac{a}{b} \cdot \frac{(n-m) \cdot N}{n}$ persones, i si la seva mitjana és Q, la suma de les notes corresponents és $\frac{a}{b} \cdot \frac{(n-m) \cdot N}{n} \cdot Q$. Semblantment la suma de les notes dels que tenen mitjana R és $\frac{b-a}{b} \cdot \frac{(n-m) \cdot N}{n} \cdot R$.
Sumem totes les notes i dividim per N i tindrem la mitjana de la classe.

---

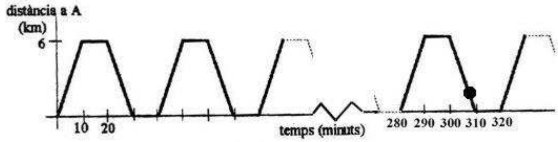
9. Amb possibilitat de xifres repetides: 118;
sense xifres repetides: 127.

Si pensem que $N = xyz$ és un nombre de tres xifres diferents, hi ha sis ordenacions possibles de les xifres, que són xyz,xzy, yxz, yzx, zxy i zyx. La suma d'aquests sis nombres és $111 \cdot 2 \cdot (x + y + z)$ i, dividint per 6, veiem que la mitjana n'és $37(x + y + z)$. Si ha de ser $37(x + y + z) = 10k$ tindrem que s'ha de complir $x + y + z = \frac{10k}{37}$. Com que aquest resultat ha de ser un nombre enter, necessàriament k ha de ser un múltiple de 37 que, als efectes del problema, on $x + y + z$ és la suma de tres nombres de l'1 al 9 només pot ser 37 o 74. Per tant l'enunciat es compleix per als nombres $N = xyz$ que tenen la suma de les seves xifres igual a 10 o igual a 20. El més petit d'aquests nombres és el 127.
Si pensem que $N = xxy$ és un nombre amb una xifra repetida, hi ha tres ordenacions possibles de les xifres, que són xxy,xyx i yxx. La suma d'aquests tres nombres és $111(2x + y)$ i, dividint per 3, veiem que la mitjana n'és $37(2x + y)$. Exactament igual que abans, raonaríem que $2x + y$, la suma de les tres xifres del nombre, ha de ser 10 o 20. El més petit d'aquests nombres és el 118.
Cap nombre de la forma xxx no compleix l'enunciat.

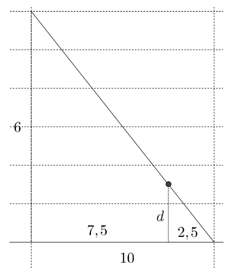
---

10. A 1,5 km d'A, circulant de B cap a A.

Si s'observa la gràfica de la funció es veu que es periòdica, amb una repetició cada 40 minuts.
Des de les 5 del matí a les 10 del matí transcorren 300 minuts i, per tant, fins a mig quart d'onze, 307,5 minuts. Haurem d'analitzar, doncs, el període que va del minut 280 al minut 320.



Mirem amb més detall l'interval que ens interessa:
Tenim que $\dfrac{6}{10} = \dfrac{d}{2,5}$ i, doncs, $d = 1,5$ km.
Com que en el punt que interessa la distància cap al punt **A** està decreixent, deduïm que l'autobús està acostant-se a **A**, és a dir que està circulant des de **B** cap a **A**.



11. 8 dies.

Si un ortoedre té dimensions $a,\ b,\ c$ el seu volum és $V = a \cdot b \cdot c$.
Si cadascuna de les dimensions disminueix en un terç passen a ser $\dfrac{2a}{3},\ \dfrac{2b}{3},\ \dfrac{2c}{3}$, el volum que queda és $V_q = \dfrac{2a}{3} \cdot \dfrac{2b}{3} \cdot \dfrac{2c}{3} = \dfrac{8V}{27}$ i el que s'ha consumit és $V_c = \dfrac{19V}{27}$. És clar, doncs, que si en 19 dies s'han consumit $\dfrac{19}{27}$ de la quantitat total de sucre i en queden $\dfrac{8}{27}$ la formiga podrà menjar-ne 8 dies més.

12. 729.

Representarem les sis xifres que apareixen en cada número com a, a, a, a, b, b.
Per tal d'estudiar quants esquemes diferents hi ha per col·locar aquestes lletres pensarem de quantes maneres es poden posar dues b en 6 llocs, que són les combinacions de 6 elements agafats de 2 en 2, $\binom{6}{2} = 15$.
Per cada un d'aquests 15 esquemes analitzarem si el nombre resultant és o no múltiple de 11, amb el correpsonent criteri de divisibilitat. Per fer-ho agruparem els esquemes segons que les dues b estiguin en llocs de la mateixa paritat o de diferent.

- En llocs de diferent paritat:

Els esquemes corresponents són *aaaabb*, *aabaab*, *baaaab*, *aaabba*, *abaaba*, *aabbaa*, *baabaa*, *abbaaa*, *bbaaaa*. Per cadascun d'ells la suma de les xifres de lloc parell és $2a+b$ i la suma de les xifres de lloc imparell també és, exactament $2a+b$. Si apliquem el criteri de divisibilitat per 11 concloem que els nombres que corresponen a aquests esquemes són tots ells múltiples de 11. En alguns casos podem escriure de manera ben general el quocient $\dfrac{aaaabb}{11} = a0a0b$, $\dfrac{aabbaa}{11} = a0b0a$, $\dfrac{bbaaaa}{11} = b0a0a$; en els altres casos el quocient pot tenir formes diferents segons les xifres que apareguin.

Per a cadascun d'aquests nou esquemes podem donar 9 valors diferents a la primera xifra (no pot ser el 0) i 9 valors diferents a l'altra (les altres 8 xifres diferents de 0 i el 0). En total, doncs, 81 números per cada esquema i, com que hi ha 9 esquemes vàlids, $9 \times 81 = 729$ números múltiples de 11 entre els que indica l'enunciat.

- Les dues b en llocs parells:

aaabab, *abaaab*, *ababaa*. La suma de les xifres de lloc parell és $3a$ i la de les xifres de lloc imparell és $a+2b$. La diferència és $2a-2b = 2(a-b)$ que només pot ser múltiple de 11 si $a = b$. Es tractaria d'un nombre de 6 xifres iguals.

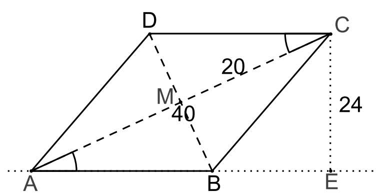
- Les dues b en llocs imparells:

aababa, *baaaba*, *babaaa*. Raonaríem de la mateixa manera que ho acabem de fer per veure que aquests esquemes no donen cap nombre múltiple de 11.

---

13. 30 unitats.

Mitjançant el teorema de Pitàgores deduïm que $AE = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32$.
Si dibuixem la diagonal DB podem veure que els triangles AEC i CMD són semblants perquè són triangles rectangles que tenen iguals -per les propietats dels rombes- els dos angles aguts que hem assenyalat a la figura.



Per tant, $\dfrac{CE}{AE} = \dfrac{24}{32} = \dfrac{DM}{20}$. D'aquí resulta $DM = 15$ i DM és la meitat de la longitud que busquem.
Observeu que la semblança de triangles indicada també permet trobar immediatament la longitud del costat del rombe.

---

14. 2020.

Si $M = 2^a$, estudiarem quants factors 2 té el nombre $M!$.
Quan calculem $M!$ estem multiplicant $\frac{2^a}{2} = 2^{a-1}$ nombres parells; $\frac{2^a}{4} = 2^{a-2}$ nombres múltiples de 4 que afegeixen un altre factor 2; $\frac{2^a}{3} = 2^{a-3}$ nombres múltiples de 8, que afegeixen un nou factor 2, i així successivament i, natuaralment, no hi ha cap altre factor 2 a $M!$. Per tant $2^a!$ és múltiple de 2 elevat a $2^{a-1} + 2^{a-2} + 2^{a-3} + ... + 2 + 1 = 2^a - 1$.
Com que aquesta és la situació en la qual el nombre de factors 2 augmenta més ràpidament, això ens fa pensar que, en general el nombre de factors 2 de $N!$ serà sempre un poquet més petit que N, és a dir que per obtenir 2012 factors iguals a 2 en el nombre $N!$ serà $N > 2012$.
Podem temptejar amb 2016, per exemple. El nombre de factors 2 que té 2016!, si indiquem com [ ] la part entera, és

$$\frac{2016}{2} + \frac{2016}{4} + [\frac{2016}{8}] + [\frac{2016}{16}] + ... + [\frac{2016}{2^9}] + [\frac{2016}{2^10}]$$

que corresponen, respectivament als nombre sparells, als múltiples de 4, als múltiples de 8, etc. Si fem aquest càlcul resulta 2010. És a dir que 2016! és divisible per 2^2010.

Si fem 2017! no afegirem cap factor 2; si fem 2018! afegirem un factor 2; si fem 2019! no afegirem cap 2; si fem 2020! afegirem dos factors 2.
Per tant el mínim valor de N per al qual $N!$ és divisible per 2^{2012} és $N = 2020$ que, de fet, és múltiple de 2^{2013}.

Una publicació de la Societat Catalana de Matemàtiques

Filial de l'Institut d'Estudis Catalans

Barcelona. Maig 2012